RECHERCHES
SUR LE MOUVEMENT DES CORPS CELESTES EN GENERAL.

PAR Mr. EULER.

I.

Après la découverte des forces centrales, dont les Planetes principales ſont pouſſées vers le Soleil, & les Satellites vers leurs principales, ſelon la raiſon renverſée des quarrés des diſtances, le mouvement des Planetes n'eſt jugé irregulier, qu'entant qu'il ne ſuit pas exactement cette loi generale. En effet le mouvement d'une Planete ſeroit parfaitement régulier, s'il étoit conforme aux regles établies par Kepler; ou ce qui revient au même, ſi la force, par laquelle le mouvement de cette Planete eſt modifié, etoit dirigée conſtamment vers le centre du Soleil, & qu'elle fût proportionnelle réciproquement aux quarrés de ſa diſtance au Soleil. Car alors, ſuivant les démonſtrations de Neuton, cette Planete décriroit autour du Soleil une parfaite ellipſe, dont l'un de ſes foyers ſe trouveroit dans le centre du Soleil, & cette ellipſe conſerveroit éternellement la même ſituation, de ſorte que, ni le plan où elle ſe trouve, ni la poſition de ſon axe, fût ſujette à aucun changement.

II. C'eſt ſur ce fondement, que Street a conſtruit ſes Tables Carolines, où non ſeulement les inegalités periodiques de chaque Planete ſont calculées ſur ce principe, mais auſſi les orbites ſont ſup-

poſées immobiles dans le Ciel. Car il ne reconnoit aucun mouvement, ni dans le lieu des aphelies, ni dans celui des noeuds, par raport aux Etoiles fixes; & ce n'eſt qu'eu égard aux équinoxes, que ces points ſouffrent ſelon lui quelque changement. Mais depuis, les Aſtronomes ayant plus ſoigneuſement examiné les orbites des Planetes, ils ont trouvé, que leurs aphelies auſſi bien que leurs noeuds, changent un peu de place, même par rapport aux Etoiles fixes. Suivant ces recherches, l'aphelie de Mars eſt avancé depuis un Siecle de 33′. 20″; mais ſes nœuds ſe trouvent reculés de 20′ par rapport aux Etoiles fixes: or dans les autres Planetes ce changement eſt plus ou moins ſenſible.

III. Comme c'eſt une verité conſtatée, que, ni les aphelies des Planetes, ni leurs nœuds, ne ſeroient ſujets à aucun changement, s'il n'y avoit pas d'autre force, qui agiſſoit ſur les Planetes, que celle, qui étant dirigée vers le Soleil, décroit exactement dans la raiſon des quarrés des diſtances; il s'enſuit néceſſairement, ou que cette force par laquelle chaque Planete eſt actuellement pouſſée, ne ſoit pas dirigée préciſement vers le centre du Soleil, ou qu'elle ne ſuive pas exactement la raiſon réciproque des quarrés des diſtances, où qu'il y ait d'autres forces outre celle-cy, qui troublent le mouvement des Planetes, en y cauſant ce changement obſervé dans leurs aphelies & nœuds. Or le mouvement des Satellites, & ſur tout celui de la Lune, nous donnent à connoitre, quelles puiſſent être ces forces nouvelles, qui agiſſent ſur les Planetes. Car la Lune étant principalement ſollicitée vers le centre de la Terre, on comprend aiſément, que cette force ſe doit étendre à une diſtance beaucoup plus grande, que celle de la Lune, & que peut-être les autres Planetes en peuvent ſentir quelque effet, quand elles ſe trouvent prés de leur Perigée.

IV. Cependant, ſi nous ſupoſons que cette force de la Terre, qui dans ſa ſurface cauſe la peſanteur, décroit en raiſon quarrée des diſtances, elle deviendra ſi petite à la diſtance, où Mars ou Venus ſe peuvent aprocher, que ſon effet doit être abſolument inſenſible. Mais il n'en eſt pas de même de la force dont les Satellites de Jupiter ſont pouſſés vers lui; cette force étant pareillement diminuée ſelon

les

les quarrés des diſtances, demeure encore aſſez conſiderable dans la region de Saturne, pour en alterer le mouvement. Et réciproquement, la force avec laquelle Saturne attire ſes Satellites, s'érend encore avec aſſez de vigueur jusqu' à l'orbite de Jupiter pour y pouvoir cauſer quelque dérangement. Le ſyſteme de la gravitation univerſelle devienr donc par là trés vraiſemblable; que toutes les planetes ne ſonr pas ſeulement attirées vers le Soleil, mais qu'elles s'attirent auſſi mutuellement les unes les aurres, par des forces réciproquement proportionnelles aux quarrés de leurs diſtances: &que même le Soleil eſt attiré vers les Planetes par des forces ſemblables.

V. Par là on reconnoitra aiſement, que la détermination du vrai mouvement des Planetes devient infiniment plus difficile, que dans la prémiere hyporheſe, où chaque Planéte n'a éré pouſſée que par une ſeule force dirigée conſtamment vers le cenrre du Soleil, & réciproquement proportionnelle aux quarrés de ſes diſtances. Car maintenant, pour bien déterminer le veritable mouvemenr d'une Planete, outre cette force qui tend vers le Soleil, on doit avoir égard aux forces, donr cette même Planéte eſt attirée vers chacune de toutes les autres. Or combien le calcul en doit devenir difficile & embarraſſanr, la ſeule rheorie du mouvement de la Lune le declare ſuffiſamment; laquelle n'érant pouſſée que par deux forces, dont l'une eſt dirigée vers le centre de la Terre, & l'autre vers celui du Soleil, eſt pourtanr ſujette à tant d'inégalités, dont pluſieurs ſont encore tout à fait inconnuës. Mais la même recherche devient beaucoup plus difficile dans les autres Planetes, à cauſe de la grande variabilité qui régne dans leurs diſtances mutuelles.

VI. Mais quand même on ſeroit heureuſement venu à bout de cette recherche, & qu'on eut trouvé moyen de déterminer exactement le mouvemenr d'autant de corps, qu'on voudra, qui s'attirent mutuellement ſelon la raiſon réciproque doublée des diſtances, j'ai encore bien des raiſons de douter, ſi ce calcul ſeroit parfaitement d'accord avec les obſervations des Planetes. Car quelques recherches & réflexions que j'ai faites, tant ſur l'origine de ces forces, que ſur les dérangemens, qu'on remarque dans le mouvement de la Lune,

& des

& des Planetes ſuperieures, m'ont porté à croire, que les forces, dont on ſoutient, que les Planetes s'attirent les unes les autres, ne ſuivent pas exactement la raiſon réciproque des quartés des diſtances, & il me ſemble presque, que l'aberration de cette raiſon croît avec les diſtances, puisque quelques inégalités periodiques, qu'on ne ſauroit attribuer à l'action des autres Planetes, ſe trouvent beaucoup plus grandes dans Saturne, que dans les autres Planetes. Et les Aſtronomes ont deja remarqué que, les Planetes ſuperieures s'écartent plus ſenſiblement des Tables Aſtronomiques, que les inferieures.

VII. En effet, ceux mêmes qui maintiennent l'attraction univerſelle de la matiere à la derniere rigueur, ſeront obligés d'admettre une petite irregularité dans la loi des forces, dont les Planetes agiſſent les unes ſur les autres. Car les partiſans de ce ſyſteme ne reconnoiſſent cette force d'attraction dans les corps celeſtes, qu'entant qu'ils ſont compoſés de matiére: or ils ſoutiennent que chaque particule de la matiére eſt douée d'une force d'attraction proportionnelle à ſa maſſe, & qui va en diminuant ſelon les quarrés des diſtances. Donc la force de gravité de la Terre, par exemple, ſur un point placé hors d'elle, n'eſt autre choſe que le réſultat de toutes les forces dont ce point eſt attiré, vers toutes les particules de la matiére, dont la Terre eſt compoſée. Mais, quoique la force de chaque particule ſoit ſuppoſée exactement ſuivre la raiſon renverſée des quarrés des diſtances; il n'en ſuit pas, que la force totale, qui en réſulte, ſe régle ſuivant la même raiſon; quelque figure qu'ait le corps entier. Newton n'a demontré cette loi de forces, qu'au cas, où la Planete eſt ronde & compoſée de matiére homogéne, ou du moins de couches ſpheriques homogénes. Or dans le cas, où la figure de la Planete n'eſt pas ſpherique, il n'eſt pas difficile de prouver par le calcul, que la force réſultante de toutes les attractions des particules de la matiere, ne décroit plus dans la raiſon de quarrés de la diſtance, ni qu'elle eſt dirigée vers le centre de la Planete, ou vers quelqu'autre point fixe.

VIII. Puisque donc les corps des Planetes ne ſont ni ſpheriques, ni formés d'une matiére ſimilaire, on ne ſera plus ſurpris, ſi

les

les forces, dont elles s'attirent mutuellement, ne ſe trouvent pas exactement réciproquement proportionnelles aux quarrés de leurs diſtances. Et même la force du Soleil ne ſuivra pas exactement cette loi, vû que, ni ſa figure eſt probablement tout à fait ſpherique, ni la matiere, dont il eſt compoſé, homogene. Voilà donc une raiſon aſſez forte, pourquoi il ſera permis de croire que la force, dont les Planetes ſont pouſſées vers le Soleil, ne ſe régle pas parfaitement ſur la raiſon renverſée des quarrés des diſtances: & cette loi ſera encore moins certaine, quand il s'agit des forces, dont les Planetes s'attirent mutuellement.

IX. Or nous allons découvrir encore une autre irregularité dans la force dont une Planete eſt pouſſée vers le Soleil. Une Planete n'eſt pas attirée vers le Soleil, qu'entant que chaque particule y eſt pouſſée par la gravitation. Donc pour connoitre la force entiére, qui agit ſur la Planete, & par laquelle ſon mouvement eſt dérangé; il faut déterminer la moienne direction de toutes les forces, dont les particules de la Planete ſeront ſollicitées vers le Soleil, & de les réduire à une ſeule force ſelon la même direction. Or on trouvera, que ſi la figure de la Planete n'eſt ni ſpherique, ni ſa matiere homogene, cette moienne direction ne paſſera plus par le centre de gravité, & que la force totale ne ſera non plus proportionnelle aux quarrés de la diſtance réciproquement; quand même la force du Soleil ſur chaque particule de la Planete ſuivroit cette loi. Par cette raiſon il ſera fort vraiſemblable que, ni les orbites des Planetes ne ſont des ellipſes parfaites, ni que leur mouvement ſe régle exactement ſur les loix de Kepler, quand même on feroit abſtraction des forces, dont les Planetes agiſſent les unes ſur les autres.

X. L'autre circonſtance, ou la direction de la force moienne, dont une Planete eſt pouſſée vers le Soleil, doit encore produire un effet, que les obſervations ſemblent verifier aſſez clairement: car une telle force tend à imprimer à la Planete un mouvement de rotation, ou, ſi elle en a un deja, à le déranger, en alterant l'axe de la rotation: & en effet il n'y a presque aucun doute, que la nutation de l'axe de la Terre ne provienne de ce que la moienne direction, dont la

Terre eſt ſollicitée tant vers le Soleil, que vers la Lune, ne paſſe point par ſon centre de gravité. Mais, quand même cette force ſeroit parfaitement connuë, il faudroit pourtant demeurer là, en ſe contentant de voir ſon effet en gros. Car les principes de la Mechanique ſont encore entierement inconnus, dont on a beſoin pour déterminer l'effet d'une force, dont la direction ne paſſe pas par le centre de gravité du corps qui en eſt pouſſé: ſurtout quand cette force tend à incliner l'axe, autour duquel le corps a déjà un mouvement de rotation.

XI. Ce ſont les raiſons tirées de la theorie pour prouver, que les forces, dont les Planetes, ou ſont tirées vers le Soleil, ou s'attirent mutuellement, ne ſuivent pas exactement la raiſon réciproque des quarrés des diſtances. Le parfait accord, qu'on remarque d'ailleurs entre cette theorie & les obſervations, ne contribue pas peu à confirmer cette concluſion; mais m'étant appliqué depuis longtems avec tout le ſoin poſſible à approfondir les inegalités dans le mouvement de la Lune, j'ai été encore davantage fortifié dans ce ſentiment. Car d'abord ayant ſuppoſé, que les forces tant de la Terre que du Soleil, qui agiſſent ſur la Lune, ſont parfaitement proportionelles réciproquement aux quarrés des diſtances, j'ai trouvé toujours le mouvement de l'apogée presque deux fois plus lent, que les obſervations le marquent; & quoique pluſieurs petits termes, que j'ai été obligé de negliger dans le calcul, puiſſent accelérer le mouvement de l'apogée, j'ai pourtant bien vu aprés pluſieurs recherches, qu'ils ne ſauroient de beaucoup prés ſuppléer à ce deffaut, & qu'il faut abſolument, que les forces, dont la Lune eſt actuellement ſollicitée, ſoient un peu differentes de celles, que j'avois ſuppoſées; car la moindre difference dans les forces ſollicitantes en produit une trés conſiderable dans le mouvement de l'apogée. J'ai remarqué auſſi une petite difference entre le mouvement de la ligne des nœuds, que le calcul donne, & celui que les obſervations ont donné à connoitre, qui vient ſans doute de la même ſource.

XII. Connoiſſant la quantité de la peſanteur à la ſurface de la Terre, j'en ai conclu la force abſolue, qui doit agir ſur la Lune, en ſuppoſant qu'elle décroit en raiſon doublée des diſtances. De

cette

cette force comparée au tems periodique de la Lune, j'ai déduit la diſtance moienne de la Lune à la Terre, & enſuite ſa parallaxe horizontale à cette même diſtance. Mais cette parallaxe s'eſt trouvée un peu trop petite, de ſorte que la Lune eſt moins eloignée de nous, que ſuivant la theorie, & partant la force, dont la Lune eſt pouſſée vers la Terre, plus petite, que j'avois ſuppoſé. Et cette difference doit être encore plus conſiderable, parce que je n'avois pas ajouté à la peſanteur naturelle ce qui en vertu de la force centrifuge en eſt retranché, de ſorte que ſi j'avois fait cette addition néceſſaire, la force ſeroit devenuë encore plus grande, & par conſéquent auſſi la diſtance moienne.

XIII. Outre cela, aprés avoir bien ſeparé les inegalités dans le mouvement de la Lune, qui proviennent uniquement de la force de la Terre, des autres qui dépendent auſſi de la force du Soleil; ces inegalités devroient etre parfaitement conformes aux règles de Kepler. Mais ayant examiné un grand nombre d'obſervations, j'ai remarqué, qu'il y faut abſolument faire quelque changement, & que les équations, qui dépendent uniquement de l'excentricité & de l'anomalie moienne, ne peuvent etre calculées ſelon les règles ordinaires. Toutes ces raiſons jointes enſemble paroiſſent donc prouver invinciblement, que les forces centripetes qu'on conçoit dans le Ciel, ne ſuivent pas exactement la loi établie par Neuton. Quelques recherches que j'ai faites ſur le mouvement de Saturne, entant qu'il doit être troublé par la force de Jupiter, m'ont encore davantage confirmé dans ce ſentiment; & je ne doute pas, que l'on ne trouvera la même choſe, ſi l'on ſe donnera la peine d'examiner plus ſoigneuſement le mouvement des autres Planetes.

XIV. La theorie de l'Aſtronomie eſt donc encore beaucoup plus eloignée du degré de perfection, auquel on pourroit penſer, qu'elle ſoit déjà portée. Car ſi les forces, dont le Soleil agit ſur les Planetes, & celles-cy les unes ſur les autres, étoient exactement en raiſon renverſée des quarrés des diſtances, elles ſeroient connuës, & par conſéquent la perfection de la theorie dependroit de la ſolution de ce probléme: *Que les forces, dont une Planéte eſt ſollicitée, étant*

connuës, on determine le mouvement de cette Planete. Ce probleme tout difficile qu'il puiſſe être, appartient neantmoins à la Mecanique pure, & on pourroit eſperer, qu'à l'aide de quelques nouvelles découvertes dans l'Analyſe, on ſauroit enfin parvenir à ſa ſolution. Mais comme la loï même des forces, dont les Planetes ſont ſollicitées, n'eſt pas encore parfaitement connuë, ce n'eſt plus une affaire de l'Analyſe ſeule : & il en faut bien davantage pour travailler à la perfection de l'Aſtronomie theorique. Et il ſemble même, qu'il n'y ait d'autre chemin de parvenir à ce but, que de s'imaginer pluſieurs nouvelles hypotheſes ſur la loi des forces, & après y avoir appliqué le calcul, de chercher, combien chacune s'ecarte des obſervations, afin que d'un grand nombre d'erreurs, on puiſſe enfin conclurre la verité. Mais on conviendra aiſément que pour cet effet, il nous manque encore quantité de choſes, tant de l'Aſtronomie pratique que de l'Analyſe ; & que ſans le ſecours de pluſieurs nouvelles découvertes de l'une & l'autre ſcience, on ne ſe puiſſe point flatter de faire de grands progrés.

XV. Je n'ai encore rien parlé de la réſiſtence, que les Planetes ſouffrent ſelon toute apparence, en paſſant par l'ether. Ce fluide, quelque ſubtil qu'il puiſſe être, ne ſauroit manquer d'oppoſer quelque réſiſtence au mouvement des Planetes ; & je crois avoir déjà prouvé aſſez evidemment l'effet de cette réſiſtence ſur le mouvement de la terre. De là il s'enſuit, comme j'ai demontré ailleurs, que les tems periodiques des Planetes ſont ſujets à une diminution continuelle, & que leurs diſtances moïennes deviennent inſenſiblement plus petites. Cette circonſtance rend la détermination des tems periodiques extrémement difficile ; puiſqu'il n'eſt plus permis de comparer les obſervations modernes avec les anciennes, pour en conclurre le tems d'une revolution, ſans avoir égard à la diminution même, qui peut avoir été cauſée dans cet intervalle de tems. Cependant parce que j'ai fait voir, que la poſition des apſides ne ſouffre aucun changement de cette réſiſtence, & que l'excentricité n'en eſt presque point alterée : la recherche des forces, dont je viens de parler, ne ſera pas beaucoup arretée de ce coté là. Enfin, quelque loi

que

que ces forces puiſſent ſuivre, elle differera ſi peu de la raiſon inverſe doublée des diſtances, que dans le calcul on pourra ſans faute regarder cette aberration comme infiniment petite, ce qui pourra beaucoup contribuer à vaincre les autres obſtacles.

XVI. Les ſecours, que la Mecanique & l'Analyſe doit fournir pour travailler à la recherche du vrai mouvement des Planetes, ſeront donc d'une autre nature, que ſi la loi des forces qui agiſſent ſur les Planetes, etoit connue : & on aura beſoin de problémes plus généralement conçus. Car, au lieu qu'auparavant on ſe pouvoit attacher uniquement à la raiſon inverſe doublée des diſtances, on doit maintenant tacher de réſoudre ces mêmes problemes plus généralement, en ſuppoſant la loi des forces quelconque. Dans cette vuë j'ai l'honneur de propoſer les problemes ſuivans, où je chercherai de déterminer le mouvement d'une Planete, ſoit qu'elle ſoit ſollicitée par une ſeule force dirigée vers un point fixe, ou par pluſieurs ſelon des directions quelconques. Je rapporterai ces mouvemens toujours, comme on eſt accoutumé de le faire dans l'Aſtronomie, à un point fixe, comme au centre du Soleil, *ſi la queſtion roule ſur une* Planete principale, ou s'il s'agit d'un Satellite, au centre de ſa Planete principale. Car quoique, ni le Soleil, ni aucune des Planetes ne ſoit en repos, on ſait qu'on les peut toujours regarder dans un tel état, pourvu qu'on transporte, tant le mouvement que les forces, dont ce mouvement eſt troublé, dans un ſens contraire ſur les corps, dont on veut rechercher le mouvement. Car on ne demande pas dans l'Aſtronomie, tant le vrai mouvement des corps celeſtes, que le mouvement apparent, tel qu'il paroitroit à un ſpectateur placé dans un certain endroit, ſoit qu'il ſoit fixe, ou mobile.

XVII. Pour réſoudre ces problemes, je me ſervirai d'une methode un peu differente de celle dont d'autres ſe ſont ſervi, qui ont ecrit ſur cette matiére. D'abord, on a taché de déterminer la veritable viteſſe du corps, dont on cherchoit le mouvement pour chaque moment ; & de cette viteſſe comparée à l'eſpace parcouru on a conclu le lieu où il doit paroitre à chaque inſtant. Pour eviter cette opération aſſez embarraſſante, & comme il n'eſt jamais queſtion dans

l'Aſtronomie de la viteſſe veritable des corps celeſtes, j'ai trouvé moyen de parvenir d'abord à une équation, entre le tems écoulé & le lieu apparent de la Planete, ce qui ne manque pas d'abréger trés conſidérablement cette recherche. Enſuite, comme presque tout ce qu'on deſire la deſſus, roule ſur des angles, je crois que la maniére dont je me ſervirai d'introduire dans le calcul ces angles mêmes, au lieu de leurs ſinus & coſinus, contribuera beaucoup à abréger le calcul, & à en tirer plus aiſément les concluſions, qu'on a uniquement en vuë dans l'Aſtronomie. Enfin, ſuivant ma methode, je ne ſuis pas obligé d'avoir égard à la courbure de la ligne, que le corps décrit, & par ce moyen j'evite quantité de recherches penibles, ſurtout quand le mouvement du corps ne ſe fait point dans le même plan. Ce grand avantage eſt renfermé dans le *Lemme* ſuivant, que je ferai préceder aux problemes, que je me ſuis propoſé de développer dans la ſuite de ce memoire.

LEMME.

Fig. 1. XVIII. *Si un Corps en M eſt ſollicité par des forces quelconques, déterminer le changement inſtantané, que ces forces produiſent dans le mouvement du Corps.*

SOLUTION.

Qu'on rapporte le mouvement de ce Corps à un plan quelconque fixe CPQ, auquel on baiſſe du Corps M la perpendiculaire MQ. Et ayant pris à volonté ſur le Plan CPQ une droite CP pour l'axe, qu'on y tire du point Q la perpendiculaire QP; de ſorte qu'à chaque inſtant la poſition du Corps M ſoit determinée par les trois coordonnées orthogonales CP, PQ & PM, qui ſoient nommées:

$$CP = x;\ PQ = y;\ \&\ QM = z.$$

Soit enſuite t le tems, pendant lequel le Corps ſoit parvenu en M depuis un certain commencement fixé; & quelques que ſoyent les forces, qui agiſſent ſur le Corps M, on les pourra toujours réduire à ces trois directions conſtantes Mx, My & Mz. normales entr'elles, & paral-

paralleles reſpectivement aux directions des trois coordonnées CP, PQ & QM. Que ces forces abſolues ou motrices ſoient

$$Mx = X;\ My = Y \ \&\ Mz = Z.$$

& poſant la maſſe du Corps $= M$, ces mêmes forces acceleratrices ſeront:

$$Mx = \frac{X}{M};\ My = \frac{Y}{M} \ \&\ Mz = \frac{Z}{M}.$$

Cela posé, prenant l'element du tems dt pour conſtant, le changement inſtantané du mouvement du Corps ſera exprimé par ces trois équations:

$$\text{I.}\ \frac{2ddx}{dt^2} = \frac{X}{M};\ \text{II.}\ \frac{2ddy}{dt^2} = \frac{Y}{M};\ \text{III.}\ \frac{2ddz}{dt^2} = \frac{Z}{M}$$

d'où l'on pourra tirer pour chaque tems ecoulé t les valeurs x, y, z, & par conſéquent l'endroit où le Corps ſe trouvera. C. Q. F. T.

Coroll. 1.

XIX. La viteſſe du Corps ſuivant la direction Mx ſera $= \frac{dx}{dt}$, ſuivant $My = \frac{dy}{dt}$ & celle ſuivant $Mz = \frac{dz}{dt}$, & cela enſorte que les quarrés de ces formules ſavoir $\frac{dx^2}{dt^2}$; $\frac{dy^2}{dt^2}$; $\frac{dz^2}{dt^2}$ expriment les hauteurs mêmes, qui conviennent à ces viteſſes. Et c'eſt à cauſe de ce rapport, que les formules differentio-differentielles ſont multipliées par le nombre 2.

Coroll. 2.

XX. Si les forces X, Y, Z, qui agiſſent ſur le Corps M, evanouïſſent, on aura ces équations:

$$\text{I.}\ ddx = 0;\ \text{II.}\ ddy = 0;\ \&\ \text{III.}\ ddz = 0.$$

qui étant integrées à cauſe de dt conſtant, donnent

I.

$$\text{I.}\frac{dx}{dt} = a;\ \text{II.}\frac{dy}{dt} = b.\ \&\ \text{III.}\frac{dz}{dt} = c.$$

& prenant encore les integrales on aura :

$$\text{I. } x = at + \alpha;\ \text{II. } y = bt + \beta;\ \&\ \text{III. } z = ct + \gamma.$$

D'où l'on voit que la viteſſe de ce Corps ſera conſtante, & que la ligne, ſuivant laquelle le Corps ſe meut, ſera droite ; tout comme la premiere loi de la Mecanique l'exige.

Coroll. 3.

XXI. Les formules données pour l'acceleration du Corps ſe rapportent à la direction des forces, que la figure repréſente, où chaque force tend à accelerer le Corps ſuivant la direction de la coordonnée, qui y répond. De là il eſt evident, que ſi une de ces trois forces agiſſoit dans un ſens contraire, on n'auroit qu'à la traiter dans le calcul comme étant négative.

Scholie.

XXII. Le fondement de ce lemme n'eſt autre choſe que le principe connu de la Mecanique $du = pdt$, où p marque la puiſſance acceleratrice, & u la viteſſe ; car ayant $u = \frac{ds}{dt}$ ſi ds eſt l'element de l'eſpace parcouru, on aura $du = \frac{dds}{dt}$ & partant $\frac{dds}{dt^2} = p$. Mais il faut encore quelques réfléxions pour voir, que ce principe s'étend également à chaque mouvement partial, où l'on réduit en penſée le mouvement réel ; & outre cela, ce lemme renferme en même tems tous les principes, dont on ſe ſert communément pour déterminer les mouvemens curvilignes.

Probleme 1.

Fig. 2. XXIII. *Un Corps M étant conſtamment pouſſé vers un point fixe C avec une force quelconque, déterminer ſon mouvement.*

Solu.

SOLUTION.

Comme le mouvement de ce Corps ſe fera dans un plan, qui paſſe par le point C, ce plan ſoit repréſenté par le plan de la planche, dans lequel on prenne à plaiſir une ligne fixe CA pour Axe. Que le Corps ait commencé ſon mouvement du point A, & aprés un tems écoulé $= t$, il ſoit parvenu en M, d'où ayant tiré la droite MC & ſur CA la perpendiculaire MP, ſoit: $CP = x$; $PM = y$ & $CM = \sqrt{(xx + yy)} = r$, & que la force acceleratrice, dont le Corps en M eſt ſollicité vers C ſelon MC, ſoit nommée $= V$; qui étant décompoſée ſuivant les directions MP, MQ, donnera pour la direction MV parallele à l'axe CA la force $Mx = \frac{x}{r} . V$, & pour la direction MP la force $My = \frac{y}{r} . V$. Donc prenant l'élément du tems dt pour conſtant, on aura en vertu du Lemme précédent

$$\frac{2ddx}{dt^2} = -\frac{x}{r} . V, \text{ \& } \frac{2ddy}{dt^2} = -\frac{y}{r} . V.$$

ou bien: $\frac{rddx}{x} = -\frac{1}{2} V dt^2$ & $\frac{rddy}{y} = -\frac{1}{2} V dt^2$

Mais les quantités x & y n'étant pas aſſez propres pour l'uſage de l'Aſtronomie, introduiſons en leur place l'angle ACM, qui ſoit $= \Phi$ & qui marque la diſtance, où la Planete paroitra depuis un point fixe au ciel A, étant vuë du point C. Ayant donc:
l'angle ACM $= \Phi$, la diſtance CM $= r$, la force Centripete en M $= V$, & le tems, que le Corps a mis pour décrire l'angle ACM, $= t$, & ſuppoſant le ſinus total $= 1$, on aura

$$x = r \cos \Phi ; \text{ \& } y = r \sin \Phi.$$

d'où l'on tirera par la differentiation:
$dx = dr \cos \Phi - r d\Phi \sin \Phi$; $dy = dr \sin \Phi + r d\Phi \cos \Phi$
& encore:

$ddx = ddr \cos\Phi - 2dr\,d\Phi \sin\Phi - r\,dd\Phi \sin\Phi - r\,d\Phi^2 \cos\Phi$
$ddy = ddr \sin\Phi + 2dr\,d\Phi \cos\Phi + r\,dd\Phi \cos\Phi - r\,d\Phi^2 \sin\Phi$
Ces valeurs étant ſubſtituées donneront :

$$\frac{r\,ddx}{x} = ddr - 2dr\,d\Phi \tang\Phi - r\,dd\Phi \tang\Phi - r\,d\Phi^2 = -\tfrac{1}{2} V\,dt^2$$

$$\frac{r\,ddy}{y} = ddr + 2dr\,d\Phi \cot\Phi + r\,dd\Phi \cot\Phi - r\,d\Phi^2 = -\tfrac{1}{2} V\,dt^2$$

Otons l'une de ces équations de l'autre, & nous aurons :

$$(2dr\,d\Phi + r\,dd\Phi)(\tang\Phi + \cot\Phi) = 0$$

ou bien $2dr\,d\Phi + r\,dd\Phi = 0$

Multiplions la premiere par cot Φ & la ſeconde par tang Φ, & nous aurons en les ajoutant enſemble :

$$(ddr - r\,d\Phi^2)(\cot\Phi + \tang\Phi) = -\tfrac{1}{2} V\,dt^2 (\cot\Phi + \tang\Phi)$$

ou bien $ddr - r\,d\Phi^2 = -\tfrac{1}{2} V\,dt^2$.

De ſorte que n'ayant plus dans le calcul, ni le ſinus, ni le coſinus de l'angle Φ, le mouvement du Corps propoſé ſera exprimé par les deux équations ſuivantes :

I. $2dr\,d\Phi + r\,dd\Phi = 0$

II. $ddr - r\,d\Phi^2 = -\tfrac{1}{2} V\,dt^2$.

dont la premiére etant multipliée par r aura d'abord pour integrale.

$$r^2\,d\Phi = A\,dt$$

& partant $d\Phi = \dfrac{A\,dt}{r^2}$, laquelle valeur étant ſubſtituée dans l'autre équation donnera :

$$ddr - \frac{AA\,dt^2}{r^3} = -\tfrac{1}{2} V\,dt^2$$

Celle-cy étant multipliée par $2dr$ & integrée donnera

$$dr^2 + \frac{AA\,dt^2}{rr} = B\,dt^2 - dt^2 \int V\,dr$$

d'où l'on tirera :

$$dt =$$

$$dt = \frac{r\,dr}{V\,(Brr - AA - rr\int V\,dr)}$$ & partant

$$d\varphi = \frac{A\,dr}{r\,V\,(Brr - AA - rr\int V\,dr)}.$$

Donc, ſi la force centrale V depend uniquement de la diſtance C M $= r$, on pourra pour chaque diſtance r déterminer tant le tems t que l'angle A C M $= \varphi$; & partant réciproquement on ſera en état à chaque tems t d'aſſigner tant l'angle A C M $= \varphi$, que la diſtance C M $= r$. Car ſoit $\int V\,dr = R$, & R ſera une fonction de r; & le mouvement du Corps ſera exprimé par ces deux équations :

I. $dt = \frac{r\,dr}{V\,(Brr - AA - rrR)}$. II. $d\varphi = \frac{A\,dr}{r\,V\,(Brr - AA - rrR)}$

C. Q. F. T.

Corol. 1.

XXIV. L'équation trouvée par la premiere integration $rr\,d\varphi = A\,dt$ montre d'abord la deſcription uniforme des aires autour du point fixe C. Car poſant l'aire A C M $= S$, on aura $dS = \frac{1}{2}rr\,d\varphi$, & partant $dS = \frac{1}{2}A\,dt$, d'où l'on tire $S = \frac{1}{2}At$; ce qui donne à connoitre, que l'aire A C M $= S$ & toujours proportionelle au tems t, dans lequel elle eſt décrite.

Corol. 2.

XXV. Le Corps ſera le plus ou le moins éloigné du point C, où la Planete ſe trouvera dans ſon aphelie, ou dans ſon perihelie, toutes les fois que $\frac{dr}{dt}$ ſera $= 0$; ce qui arrive quand $Brr - AA - rrR = 0$: Donc les racines réelles de cette équation donneront, ou la plus grande, ou la plus petite diſtance de la Planete au Soleil.

Scholie.

XXVI. Pour avoir une idée préciſe du tems que la Planete met à parcourir un eſpace quelconque de ſon orbite, elle ſeroit tirée

de trop loin, ſi l'on vouloit la comparer avec les mouvemens, qui ſont cauſés par la peſanteur naturelle ſur la ſurface de la terre : car alors on devroit connoître le vrai rapport, que tient la force centrale V à la gravité, & encore la diſtance r en pieds, ce qui ſeroit pour la plûpart impoſſible. On fera donc mieux de comparer les mouvemens des Corps celeſtes avec le mouvement de la Terre autour du Soleil ; en ſuppoſant même que la Terre décrive à ſa diſtance moienne un cercle parfait avec un mouvement uniforme ; & alors on n'aura qu'à connoître les rapports des forces celeſtes à la force, dont la Terre eſt pouſſée au Soleil, & des diſtances à la diſtance moienne de la terre au Soleil. Soit donc la diſtance moïenne de la terre au Soleil $= a$; la force acceleratrice dont la Terre eſt ſollicitée vers le Soleil $= \Pi$, & ſuppoſons que la Terre décrive autour du Soleil un angle $= \omega$ dans le tems t. Dans ce cas nous aurons donc $V = \Pi$; $r = a$; & $\varphi = \omega$; & puisque l'angle ω eſt proportionnel au tems t, le differentiel $d\omega$ ſera pareillement conſtant, & $d\,d\omega = o$. Or la ſeconde équation $d\,dr - r\,d\varphi^2 = -\frac{1}{2} V\,dt^2$ ſe changera en cette forme : $-a\,d\omega^2 = -\frac{1}{2}\Pi\,dt^2$, d'où nous tirons

$$\frac{1}{2}\,dt^2 = \frac{a\,d\omega^2}{\Pi} \quad \& \quad dt = d\omega\sqrt{\frac{2a}{\Pi}}.$$

C'eſt pourquoi ſi nous mettons $\frac{a\,d\omega^2}{\Pi}$ à la place de $\frac{1}{2}\,dt^2$, nous introduirons au lieu du tems t l'angle ω, & par ce moien nous connoîtrons, de combien une Planete quelconque avance, pendant que la Terre décrit ſelon ſon mouvement moyen l'angle ω ; meſure qui ſemble la plus convenable pour l'uſage de l'Aſtronomie. Pour cet effet, on doit exprimer la diſtance r par la diſtance a, & on n'aura qu'à chercher le rapport de la force V à la force Π, qu'on peut regarder comme connue. Car de quelque maniere que dépendent les forces celeſtes des diſtances, on pourra toujours determiner le rapport entre Π & V, en ſachant le rapport entre les diſtances a & r.

COROLL.

Coroll. 3.

XXVII. Si l'expreſſion de la force V eſt une fonction quelconque de la diſtance R, il peut arriver, que l'orbite du corps A M ſoit un cercle ayant ſon centre dans le point C, & le mouvement ſera uniforme. Car poſant la diſtance r conſtante, le raport $\frac{d\Phi}{dt}$ ſera auſſi conſtant, de même que la force V. Et partant la ſeconde équation differentio-differentielle donnera $r\,d\Phi^2 = \frac{1}{2}V\,dt^2 = \frac{a\,V\,d\omega^2}{\Pi}$ & par conſéquent $\frac{d\Phi}{d\omega} = \sqrt{\frac{a\,V}{r\,\Pi}}$.

Coroll. 4.

XXVIII. Dans ce cas donc le mouvement angulaire du Corps M autour de C ſera au mouvement angulaire de la Terre autour du Soleil comme $\sqrt{\frac{V}{r}}$ à $\sqrt{\frac{\Pi}{a}}$. Or dans le mouvemens uniforme, les tems periodiques étant réciproquement comme les mouvement angulaires, le tems periodique du corps M autour du centre C ſera au tems periodique de la Terre autour du Soleil comme $\sqrt{\frac{r}{V}}$ à $\sqrt{\frac{a}{\Pi}}$.

Coroll. 5.

XXIX. Donc, ſi pluſieurs corps ſe meuvent chacun dans un cercle autour d'un point fixe ſitué dans ſon centre, leurs tems periodiques ſeront entr'eux en raiſon compoſée ſousdoublée de la raiſon directe des rayons, & de la raiſon inverſe des forces centrales.

Scholie.

XXX. Comme il n'eſt pas à propos, qu'on exprime le tems t & l'angle φ par la diſtance r, on doit tacher de chercher la diſtance r exprimée par le tems t, & alors on déterminera l'angle φ pareillement

par le tems t à l'aide de l'équation $d\varphi = \frac{A\,dt}{rr}$. Pour cet effet il conviendra de développer le cas, où la force V eſt exactement en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, ce qui nous fournira des ſecours pour appliquer le calcul aux cas, où cette loi n'eſt obſervée qu'à peu prés.

Probleme. 2.

XXXI. *La force, dont le Corps* M *eſt pouſſé vers le point fixe* C, *etant réciproquement proportionelle au quarré de la diſtance* C M; *déterminer le mouvement de ce corps.*

Solution.

Ayant nommé la diſtance C M $= r$, la force ſera comme $\frac{1}{rr}$; Ot la force dont la Terre eſt pouſſée vers le Soleil à la diſtance $= a$, étant poſée $= \Pi$, ſi C etoit le centre du Soleil, & que la force fut réciproquement proportionnelle aux quarrés des diſtanees, on auroit $V = \frac{aa}{rr}\Pi$: mais en cas que la force abſolue du point C fut ou plus grande, ou plus petite, que celle du Soleil, nous mettrons:

$$V = \frac{\alpha aa}{rr}\Pi$$

de ſorte qu'introduiſant au lieu de $\frac{1}{2}dt^2$ le mouvement moïen de la Terre $\frac{a\,d\omega^2}{\Pi}$, nous ayons:

$$\tfrac{1}{2}V\,dt^2 = \frac{\alpha a^3}{\pi}d\omega^2$$

Par conſéquent nommant comme ci-deſſus l'angle A C M $= \varphi$, nous aurons ces deux équations:

I. $2\,dr\,d\Phi + r\,dd\Phi = 0$

II.

II. $ddr - r d\varphi^2 = -\frac{\alpha a^3}{rr} d\omega^2$

de la premiere desquelles nous tirerons:

$$rr\,d\varphi = \mathfrak{G} a a\, d\omega$$

puisque l'element $d\omega$ eſt conſtant: & à cauſe de $r d\varphi^2 = \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{G} a^4 d\omega^2}{r^3}$, la ſeconde équation ſe changera en

$$ddr - \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{G} a^4 d\omega^3}{r^3} + \frac{\alpha a^3 d\omega^2}{rr} = 0$$

qui etant multipliée par $2dr$ aura pour integrale

$$dr^2 + \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{G} a^4 d\omega^2}{rr} - \frac{2\alpha a^3 d\omega^2}{r} = \gamma a a d\omega^2$$

d'où nous obtiendrons:

$$d\omega = \frac{r dr}{a\sqrt{(\gamma rr + 2\alpha a r - \mathfrak{G}\mathfrak{G} a a)}}$$

Donc afin que le monvement ſoit réel, il faut que $\gamma rr + 2\alpha a r - \beta\beta aa > 0$ où bien que

$$rr > \frac{-2\alpha}{\gamma} ar + \frac{\beta\beta}{\gamma} aa; \text{ ou } rr = \frac{-2\alpha a r + \beta\beta aa + \gamma ff}{\gamma}$$

par conſéquent il y aura:

$$r = \frac{-\alpha a}{\gamma} + \sqrt{\left(\frac{\alpha\alpha aa}{\gamma\gamma} + \frac{\beta\beta aa}{\gamma} + ff\right)}$$

ff marquant une quantité affirmative quelconque. Nous aurons donc ou

$$r > \frac{-\alpha a + a\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta\gamma)}}{\gamma} \text{ ou } r > \frac{-\alpha a - a\sqrt{(\alpha\alpha + \beta\beta\gamma)}}{\gamma}$$

de là on voit, que γ doit etre une quantité negative. Poſons donc $-\gamma$ au lieu de γ & nous aurons les limites de la diſtance r:

$$r > \frac{\alpha a - a\sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta\gamma)}}{\gamma} \text{ & } r < \frac{\alpha a + a\sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta\gamma)}}{\gamma}$$

& la

& la diſtance moienne ſera $r = \frac{\alpha\alpha}{\gamma}$. C'eſt pourquoi ſuppoſons $r = \frac{\alpha\alpha}{\gamma} + \alpha s$: & la formule trouvée pour $d\omega$ ſe changera en

$$d\omega = (\frac{\alpha}{\gamma} + s)\,ds : \sqrt{(\frac{\alpha\alpha}{\gamma} - \beta\beta - \gamma ss)}$$

Puiſque $ss < \frac{\alpha\alpha}{\gamma\gamma} - \frac{\beta\beta}{\gamma}$ ou $\frac{\gamma\gamma ss}{\alpha\alpha - \beta\beta\gamma} < 1$; prenant 1 pour le ſinus total, nous pourrons égaler $\frac{\gamma s}{\gamma(\alpha\alpha - \beta\beta\gamma)}$ à un ſinus ou coſinus d'un certian angle. Soit cet angle $= v$, & poſons $s = \frac{\sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta\gamma)}}{\gamma} \cos v$, pour avoir $r = \frac{\alpha\alpha}{\gamma} + \alpha\sqrt{\frac{(\alpha\alpha - \beta\beta\gamma)}{\gamma}} \cos v$ &

$$d\omega = \frac{\alpha\, dv + dv \cos v.\ \sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta\gamma)}}{\gamma\sqrt{\gamma}}.$$

& partant $\omega = \frac{\alpha v + \sin v.\ \sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta\gamma)}}{\gamma\sqrt{\gamma}} + \text{Conſt.}$

Pour éviter les expreſſions trop embarraſſantes des quantités conſtantes arbitraires, faiſons $\frac{\alpha\alpha}{\gamma} = c$ et $\frac{\alpha\sqrt{(\alpha\alpha - \beta\beta\gamma)}}{\gamma} = ck$, pour avoir $r = c(1 + k \cos v)$. & on obtiendra $\omega = \frac{cv + ck \sin v}{\alpha\sqrt{\gamma}}$. Pour rendre cette expreſſion encore plus ſimple, au lieu de l'angle v introduiſons un autre ζ de ſorte que $\zeta = \frac{\alpha\sqrt{\gamma}}{c}\omega$, ou $\omega = \frac{c}{\alpha\sqrt{\gamma}}\zeta$; ou parceque $\gamma = \frac{\alpha\alpha}{c}$, on aura $\omega = \frac{c\sqrt{c}}{\alpha\sqrt{\alpha\alpha}}\zeta$ & $\alpha\, d\omega^2 = \frac{c^3\, d\zeta^2}{\alpha^3}$: & l'element $d\zeta$ ſera egalement conſtant; Par conſéquent comme les équations differentio-differentielles auront cette forme;

I.

I. $2\,dr\,d\Phi + r\,d\,d\Phi = 0$

II. $d\,dr - r\,d\Phi^2 + \frac{2^0\,d\zeta^2}{rr} = 0$

les valeurs integrales ſe trouveront en ſorte. Premiérement qu'on cherche un angle v tel que

$$\zeta = v + k \text{ ſi. } v, \text{ ou } d\zeta = dv\,(1 + k\cos v)$$

& alors on aura $r = c\,(1 + k\cos v)$, & à cauſe de $\frac{b}{\sqrt{\gamma}} = \frac{c}{a}\sqrt{(1-kk)}$ on trouvera

$$rr\,d\Phi = c\,c\,d\zeta\sqrt{(1-kk)} \text{ \& } d\Phi = \frac{d\zeta\sqrt{(1-kk)}}{(1+k\cos v)^2}$$

ou bien $d\Phi = \frac{dv\sqrt{(1-kk)}}{1+k\cos v}$: leſquelles formules renferment la plus ſimple maniere de déterminer le mouvement du Corps M ou du point C. C. Q. F. T.

Coroll. 1.

XXXII. Si la lettre k etoit $= 0$, on auroit $d\zeta = dv$; $r = c$, & $d\Phi = dv$; donc dans ce cas le Corps décrira autour du centre C un cercle, & ſon mouvement ſera uniforme.

Coroll. 2.

XXXIII. Or ſi la lettre k n'eſt pas $= 0$, la diſtance $CM = r$ ſera variable; & ſa plus grande diſtance proviendra $r = c\,(1+k)$, & la plus petite $r = c\,(1-k)$, dont celle là répond à l'angle $v = 0$, & celle cy à l'angle $v = 180°$. Mais la diſtance moyenne $r = c$ répondra à l'angle $v = 90°$, ou $v = 270°$. Or la lettre k étant proportionnelle à la difference entre la diſtance moyenne & la plus grande ou plus petite, ſera l'excentricité de l'orbite.

COROLL. 3.

XXXIV. L'angle ζ etant proportionnel au tems, puisqu'il devient $= 0$, ſi $v = 0$, prend ſon commencement de l'endroit A, où la diſtance eſt la plus grande; par conſequent cet angle ζ exprimera l'anomalie moienne de la planete M. Et ſi l'angle v devient $= 180°$, l'anomalie moïenne ζ ſera auſſi $= 180$, & alors la diſtance M C ſera la plus petite.

COROLL. 4.

XXXV. Comme l'anomalie moyenne ζ eſt proportionnelle au tems ecoulé, depuis que la Planete a paſſé par ſon aphelie A, l'angle ζ ſera connu; & de là on trouvera l'angle v par le moien de cette équation $\zeta = v + k \sin v$, dont le calcul ne ſera pas difficile, ſi l'on ſait ſe ſervir des approximations. Or ayant trouvé l'angle v, on aura d'abord la diſtance $C M = r = c(1 + k \cos v)$, ou plutot ſon rapport à la diſtance moïenne c.

COROLL. 5.

XXXVI. Or pour trouver l'angle $A C M = \varphi$, que le Corps a actuellement décrit depuis un lieu fixe A, on doit conſiderer l'équation $d\varphi = \frac{dv\sqrt{(1-kk)}}{1+k\cos v}$, dont l'integrale ſe trouvera $\cos(\varphi - A) = \frac{k+\cos v}{1+k\cos v}$. D'où il s'enſuit, que ſi $v = 0$, il y a $\cos(\varphi - A) = 1$ & partant $\varphi = A$. Mais ſi $v = 180°$, pour le perihelie, on aura $\cos(\varphi - A) = -1$, ou $\varphi = A + 180°$. d'où l'on voit que le perihelie eſt eloigné de 180° de l'aphelie.

SCHOLIE.

XXXVII. Si l'excentricité k eſt fort petite, il ſera plus commode de chercher l'integrale de $\frac{dv\sqrt{(1-kk)}}{1+k\cos v}$ par le moyen des ſeries; en faiſant

$\frac{1}{1+k\cos v}$

$\frac{1}{1+k\cos v} = 1 - k\cos v + k^2\cos v^2 - k^3\cos v^3 + k^4\cos v^4 - k^5\cos v^5 +$ &c.

Mais pour eviter les puiſſances du $\cos v$, il ſera convenable pour l'uſage de l'Aſtronomie, de les convertir en coſinus des angles multiples de v ſuivant ces formules.

$\cos v = \cos v$

$\cos v^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2v$

$\cos v^3 = \frac{3}{4}\cos v + \frac{1}{4}\cos 3v$

$\cos v^4 = \frac{3}{8} + \frac{4}{8}\cos 2v + \frac{1}{8}\cos 4v$

$\cos v^5 = \frac{10}{16}\cos v + \frac{5}{16}\cos 3v + \frac{1}{16}\cos 5v$

$\cos v^6 = \frac{10}{32} + \frac{15}{32}\cos 2v + \frac{6}{32}\cos 4v + \frac{1}{32}\cos 6v$

&c.

& de là on tirera cette équation

$$\frac{1}{1+k\cos v} = 1 - k\cos v + \tfrac{1}{2}k^2\cos 2v - \tfrac{1}{4}k^3\cos 3v + \tfrac{1}{8}k^4\cos 4v$$
$$+\tfrac{1}{2}kk - \tfrac{3}{4}k^3 + \tfrac{4}{8}k^5 - \tfrac{5}{16}k^5 + \tfrac{6}{32}k^6$$
$$+\tfrac{3}{8}k^4 - \tfrac{10}{16}k^5 + \tfrac{15}{32}k^6$$
$$+\tfrac{10}{32}k^6 \quad \&c.$$

Puiſque le coëfficient de chaque terme eſt une ſerie infinie, poſons pour abreger

$$\frac{1}{1+k\cos v} = A - B\cos v + C\cos 2v - D\cos 3v + E\cos 4v - \&c.$$

& on verra d'abord que

$$A = 1 + \tfrac{1}{2}kk + \tfrac{3}{8}k^4 + \tfrac{10}{32}k^6 + \&c. = \frac{1}{\sqrt{(1-kk)}}.$$

mais pour trouver les autres coëfficients, multiplions de part & d'autre par $1 + k\cos v$, & puisque $\cos v.\cos nv = \frac{1}{2}\cos(n-1)v + \frac{1}{2}\cos(n+1)v$ nous aurons:

$1 = A$

$$1 = A - B\cos v + C\cos 2v - D\cos 3v + E\cos 4v - F\cos 5v + \&c.$$
$$-\tfrac{1}{2}Bk + Ak - \tfrac{1}{2}Bk + \tfrac{1}{2}Ck - \tfrac{1}{2}Dk + \tfrac{1}{2}Ek$$
$$+\tfrac{1}{2}Ck - \tfrac{1}{2}Dk + \tfrac{1}{2}Ek - \tfrac{1}{2}Fk + \tfrac{1}{2}Gk \&c.$$

& partant il en réſultera.

$$B = \frac{2(A-1)}{k};\ C = \frac{2(B-Ak)}{k};\ D = \frac{2C-Bk}{k};\ E = \frac{2D-Ck}{k}$$

Donc poſant $\frac{1-\sqrt{(1-kk)}}{k} = f$, on trouvera

$$\frac{\sqrt{(1-kk)}}{1+k\cos v} = 1 - 2f\cos v + 2ff\cos 2v - 2f^3\cos 3v + 2f^4\cos 4v - \&c.$$

& prenant l'integrale $\Phi = \int \frac{dv\sqrt{(1-kk)}}{1+k\cos v}$, on aura

$$\Phi = A + v - 2f\sin v + \tfrac{2}{2}ff\sin 2v - \tfrac{2}{3}f^3\sin 3v + \tfrac{2}{4}f^4\sin 4v - \tfrac{2}{5}f^5\sin 5v - \&c.$$

ou puisque $v = 3 - kf\sin v$ on aura

$$\Phi = A + 3 - (2f + k)\sin v + \tfrac{2}{2}ff\sin 2v - \tfrac{2}{3}f^3\sin 3v - \tfrac{2}{4}f^4\sin 4v - \tfrac{2}{5}f^5\sin 5v \&c.$$

Coroll. 6.

XXXVIII. La premiere partie de cette expreſſion $A + 3$ repreſente la longitude moyenne de la Planete dans ſon orbite, & elle montreroit ſon vrai lieu, ſi l'excentricité k evanouïſſoit; auquel cas la Planete décriroit un cercle d'un mouvement uniforme. Et puiſque l'accroiſſement de la longitude moyenne eſt egal à l'accroiſſement de l'anomalie moyenne, c'eſt un ſigne, que le point A, d'où l'on conte l'anomalie moyenne eſt immobile; & partant auſſi la ligne des abſides.

Coroll. 7.

XXXIX. Les autres termes de l'expreſſion trouvée

$$-(2f + k)\sin v + \tfrac{2}{2}ff\sin 2v - \tfrac{2}{3}f^3\sin 3v + \tfrac{2}{4}f^4\sin 4v - \tfrac{2}{5}f^5\sin 5v + \&c.$$

comprennent l'inégalité du mouvement, ou la difference entre la longitude moyenne & la longitude vraie; & qu'on nomme dans l'Aſtronomie la *Proſtaphereſe*, ou l'equation elliptique. Cette équation donc conſiſte d'une infinité de parties, dont la prémiére eſt proportionnelle au ſinus de

de l'angle v, la ſeconde au ſinus du double de cet angle, la troiſième au ſinus du triple angle, & ainſi de ſuite.

Corollaire 8.

XL. Or pourvûque l'excentricité k ne ſoit pas trop grande, les coëfficients de ces termes décroiſſent ſi ſubitement, que trois ou quatre termes ſuffiſent pour la plus grande préciſion, qu'on peut ſouhaiter dans l'Aſtronomie. Et c'eſt pour cette raiſon, que cette maniere de déterminer la valeur de l'angle φ, quoiqu'elle renferme une ſerie infinie, eſt preferable à la premiére (§. 36), où l'integration a reuſſi parfaitement.

Corollaire 9.

XLI. Pour les valeurs de ces coëfficiens, ſi k eſt un nombre aſſez petit, puisque

$$\sqrt{(1-kk)} = 1 - \tfrac{1}{2}k^2 - \frac{1.1}{2.4}k^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6}k^6 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}k^8 - \&c.$$

nous aurons

$$f = \tfrac{1}{2}k + \frac{1.1}{2.4}k^3 + \frac{1.1.3}{2.4.6}k^5 + \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}k^7 + \&c.$$

& partant les coëfficiens ſeront.

Celui de

$-\sin v$	$2f + k$	$= 2k + \tfrac{1}{4}k^3 + \frac{1.3}{4.6}k^5 + \frac{1.3.5}{4.6.8}k^7 + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10}k^9 + \&c.$
$+\sin 2v$	$\tfrac{2}{2}ff$	$= \tfrac{1}{4}k^2 + \frac{1.3}{4.6}k^4 + \frac{1.3.5}{4.6.8}k^6 + \frac{1.3.5.7}{4.6.8.10}k^8 + \&c.$
$-\sin 3v$	$\tfrac{3}{3}f^3$	$= \tfrac{1}{12}k^3 + \frac{1.3}{6.8}k^5 + \frac{1.3.5}{4.8.10}k^7 + \frac{1.3.5.7}{4.6.10.12.}k^9 + \&c.$
$+\sin 4v$	$\tfrac{2}{4}f^4$	$= \frac{1}{32}k^4 + \frac{1}{32}k^6 + \frac{7}{256}k^8$

Coroll. 10.

XLII. Mais ayant déterminé, ou connu d'ailleurs la valeur de f. on aura $k = \frac{2f}{1+ff}$, & par là il ſera plus aiſé de déterminer les coëfficiens de la formule
$\Phi = A + \zeta - (2f+k)\,\text{ſi} + \frac{3}{2}vf^2\,\text{ſi}\,2v - \frac{3}{3}f^3\,\text{ſi}\,3v + \frac{3}{4}f^4\,\text{ſi}\,4v +$ &c.
où la loi de la progreſſion ſaute d'abord aux yeux.

Coroll. 11.

XLIII. Toute cette recherche revient donc principalement à l'angle v, qu'on doit déduire de l'anomalie moyenne ζ par le moyen de cette équation: $\zeta = v + k\,\text{ſi}\,v$. D'où ayant déjà connu cet angle v à peuprès, on aura plus exactement $v = \zeta - k\,\text{ſi}\,v$; qu'on mette alors cette nouvelle valeur de v dans le terme $k\,\text{ſi}\,v$, & on trouvera encore une plus exacte pour v; de ſorte qu'on pourra par un calcul aſſez facile déterminer, pour chaque anomalie moyenne ζ, la vraie valeur de l'angle v, que je nomme l'anomalie excentrique.

Scholie.

XLIV. Ayant ainſi découvert la forme la plus commode des quantités integrales, qui déterminent le mouvement d'un corps ſollicité vers un centre en raiſon réciproque des quarrés de ces diſtances; on pourra emploier des formules ſemblables pour déterminer le mouvement, lorsque la force centripete eſt d'une autre nature, pourvu qu'elle ne differe que fort peu de cette loi: & que l'excentricité de l'orbite ne ſoit pas trop grande; ce qui ſuffit tant pour les Planetes principales que pour les Satellites.

Probleme 3.

XLV. *Lorsque la force, dont le Corps* M *eſt pouſſé vers le point* C *conſideré comme fixe, n'eſt qu'à peu près proportionnelle réciproquement*

ment aux quarrés de ſes diſtances, trouver le mouvement de ce Corps, ſuppoſé que ſon orbite ne differe pas beaucoup d'un cercle.

SOLUTION.

Nommant comme cy-deſſus la diſtance C M $= r$, l'angle A C M $= \Phi$, la force M C $=$ V; la diſtance moyenne de la Terre au Soleil $= a$, la force dont la Terre eſt attirée au Soleil dans cette diſtance $= \Pi$, & l'angle infiniment petit $= d\omega$, que la Terre décrit autour du Soleil ſelon ſon mouvement moyen; & que nous introduiſons au lieu de l'element du tems dt, en le ſuppoſant conſtant; nous aurons les deux équations ſuivantes:

I. $2\,dr\,d\Phi + r\,dd\,\Phi = 0$

II. $ddr - r\,d\,\Phi^2 + \frac{a\,V}{\Pi}\,d\omega^2 = 0.$

Maintenant, puisque la force V n'eſt qu'à peu prés réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance r, ſuppoſons $\frac{a\,V}{\Pi} = \frac{mc^3}{rr} + R$. la lettre R marquant une fonction quelconque de r, dont la loi de l'attraction s'ecarte de la raiſon réciproque doublée des diſtances: & la ſeconde équation deviendra:

II. $d\,dr - r\,d\,\Phi^2 + \frac{mc^3\,d\omega^2}{rr} + R\,d\omega^2 = 0.$

& l'integrale de la premiere ſera:

$$rr\,d\,\Phi = nc\,c\,d\omega$$

qui donne $d\Phi = \frac{nc\,c\,d\omega}{rr}$ & $r\,d\,\Phi^2 = \frac{nn\,c^4\,\omega^2}{r^3}$; laquelle valeur etant miſe dans la ſeconde équation donnera

$$ddr - \frac{nnc^4\,d\omega^2}{r^3} + \frac{mc^3\,d\,\omega^2}{rr} + R\,d\,\omega^2 = 0.$$

où eliminant la conſideration de l'element conſtant $d\omega$, nous repreſenterons cette équation ſous cette forme.

$$d.\frac{dr}{d\omega}$$

$$d.\frac{dr}{d\omega} - \frac{nnc^4 d\omega}{r^3} + \frac{mc^3 d\omega}{rr} + R\,d\omega = 0.$$

A préſent pour faire uſage des formules trouvées cy-deſſus poſons

$$d\omega = \alpha\, dv\,(1 + k\cos v)$$

& puiſque r n'aura plus exactement la forme $c\,(1 + k\cos v)$ ſuppoſons:

$$r = c\,(1 + k\cos v + s)$$

où s ſera une quantité fort petite; d'où nous aurons:

$dr = -ck\,dv\,\sin v + c\,ds$ & partant

$$0 = d.\frac{-kdv\sin v + ds}{dv(1+k\cos v)} + \alpha\alpha dv(1+k\cos v)\left\{\frac{m}{(1+k\cos v+s)^2} - \frac{nn}{(1+k\cos v+s)^3} + \frac{R}{c}\right\}$$

qui puiſque s eſt une quantité fort petite, ſe changera en cette forme:

$$0 = d.\frac{-kdv\sin v + ds}{dv(1+k\cos v)} + \alpha\alpha dv\left\{\begin{array}{l} + \dfrac{m}{1+k\cos v} - \dfrac{2ms}{(1+k\cos v)^2} + \dfrac{R}{c}(1+k\cos v) \\ - \dfrac{nn}{(1+k\cos v)^2} + \dfrac{3nns}{(1+k\cos v)^3} \end{array}\right\}$$

Suppoſons maintenant l'element dv conſtant, & nous aurons en differentiant le premier membre,

$$0 = \frac{dds}{1+k\cos v} + \frac{kdsdv\sin v}{(1+k\cos v)^2} - \frac{kdv^2\cos v - k^2dv^2}{(1+k\cos v)^2}$$
$$- \frac{2\alpha\alpha ms\,dv^2}{(1+k\cos v)^2} + \frac{3\alpha\alpha nns\,dv^2}{(1+k\cos v)^3} + \frac{\alpha\alpha m\,dv^2}{1+k\cos v} - \frac{\alpha\alpha nn\,dv^2}{(1+k\cos v)^2}$$
$$+ \frac{\alpha\alpha R\,dv^2}{c}(1+k\cos v)$$

ou multipliant par $(1+k\cos v)^2$:

$$0 = dds(1+k\cos v) + kdsdv\sin v - 2\alpha\alpha ms\,dv^2 + \frac{3\alpha\alpha nns\,dv^2}{1+k\cos v}$$
$$+ \frac{\alpha\alpha}{}$$

$$+\frac{\alpha\alpha}{c}R\,dv^2\,(1+k\cos v)^3$$

$$-k\,dv^2\cos v-k^2\,dv^2+\alpha\alpha m\,dv^2+\alpha\alpha mk\,dv^2\cos v-\alpha\alpha nn\,dv^2$$

Maintenant tout revient à la forme que la quantité R peut avoir; où je ferai deux hypotheſes differentes.

I. Hypothese

ſoit $R=\frac{\mu c^{\nu+1}}{r^\nu}$, de ſorte que la force centrale totale ſoit

$$V=\frac{H}{a}\left\{\frac{mc^2}{rr}+\frac{\mu c^{\nu+1}}{r^\nu}\right\}$$

& à cauſe de $r=c\,(1+k\cos v+s)$ nous aurons:

$$R=\frac{\mu c}{(1+k\cos v+s)^\nu}$$

& partant

$$\frac{R}{c}(1+k\cos v)^3=\frac{\mu}{(1+k\cos v)^{\nu-3}}-\frac{\mu\nu s}{(1+k\cos v)^{\nu-2}}=$$

$$\mu+(3-\nu)\mu k\cos v+\tfrac{1}{2}(3-\nu)(2-\nu)\mu k^2\cos v^2+\tfrac{1}{6}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)k^3\cos v^3-\frac{\mu\nu s}{(1+k\cos v)^{\nu-3}}$$

Cette valeur ſubſtituée donnera:

$$0=\frac{dds}{dv^2}(1+k\cos v)+\frac{k\,ds}{dv}\sin v-2\alpha\alpha ms+\frac{3\alpha\alpha nns}{1+k\cos v}-\frac{\alpha\alpha\mu\nu s}{(1+k\cos v)^{\nu-2}}$$

$$-k\cos v-kk+\alpha\alpha m+\alpha\alpha mk\cos v-\alpha\alpha nn$$

$$+\alpha\alpha\mu+(3-\nu)\alpha\alpha\mu k\cos v+\tfrac{1}{2}(3-\nu)(2-\nu)\mu\alpha\alpha k^2\cos v^2+\tfrac{1}{6}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu\alpha\alpha k^3\cos v^3$$

Cette équation devroit evanouïr en cas que $\mu=0$, & $s=0$, c'eſt pourquoi, puisque m eſt une quantité donnée, déterminons les conſtantes α & n enſorte, qu'autant de termes, qui ne contiennent pas s evanouïſſent, qu'il ſe pourra. Pour cet effet réduiſons ces termes de la façon ſuivante:

$$-kk+\alpha\alpha m-\alpha\alpha nn+\alpha\alpha\mu+\tfrac{1}{2}(3-\nu)(2-\nu)\mu\alpha\alpha kk$$

$$-k\cos$$

$-k\cos v+\alpha\alpha mk\cos v+(3-v)\alpha\alpha\mu k\cos v+\frac{1}{8}(3-v)(2-v)(1-v)\mu\alpha^2k^3\cos v$
$+\frac{1}{4}(3-v)(2-v)\mu\alpha\alpha kk\cos 2v$
$+\frac{1}{24}(3-v)(2-v)(1-v)\mu\alpha\alpha k^3\cos 3v$

& faisons evanouïr les deux premieres lignes; ce qui donnera:

$\alpha\alpha nn=\alpha\alpha m-kk+\alpha\alpha\mu+\frac{1}{4}(3-v)(2-v)\mu\alpha\alpha kk$

$$\& \alpha\alpha=\frac{1}{m+(3-v)\mu+\frac{1}{8}(3-v)(2-v)(1-v)\mu kk}$$

par consequent

$nn=m(1-kk)+\mu-\frac{1}{4}(3-v)(2+v)\mu kk-\frac{1}{8}(3-v)(2-v)(1-v)\mu k^4$

Ayant trouvé ces valeurs pour α & n, la quantité s sera determinée par cette équation:

$$0=\frac{dds}{\alpha\alpha dv^2}(1+k\cos v)+\frac{kds}{\alpha^2dv}\sin v-2ms+\frac{3nns}{1+k\cos v}-\frac{\mu vs}{(1+k\cos v)^{v-2}}$$
$$+\frac{1}{4}(3-v)(2-v)\mu kk\cos 2v+\frac{1}{24}(3-v)(2-v)(1-v)\mu k^3\cos 3v$$

soit pour cet effet:

$$s=A+B\cos v+C\cos 2v+D\cos 3v$$

$$\frac{ds}{dv}=-B\sin v-2C\sin 2v-3D\sin 3v$$

$$\frac{dds}{dv^2}=-B\cos v-4C\cos 2v-9D\cos 3v$$

Ces valeurs etant substituées donneront:

$$-\frac{B}{\alpha\alpha}\cos v-\frac{4C}{\alpha\alpha}\cos 2v-\frac{9D}{\alpha\alpha}\cos 3v$$
$$-\frac{Bk}{2\alpha\alpha}-\frac{2Ck}{\alpha\alpha}-\frac{Bk}{2\alpha\alpha}-\frac{2Ck}{\alpha\alpha}$$
$$-\frac{Bk}{2\alpha\alpha}-\frac{Ck}{\alpha\alpha}-\frac{9Dk}{2\alpha\alpha}+\frac{Ck}{\alpha\alpha}$$
$$+\frac{Bk}{2\alpha\alpha}-2mD$$

$-2mA$

$$-2mA \quad -2mB \quad -\frac{3}{2}\frac{D\,k}{a\,a} \qquad +3nnD$$
$$+3nnA \quad +3nnB \quad -2mC \qquad -\tfrac{3}{2}nnCk$$
$$-\tfrac{3}{2}nnkB \quad -3nnkA \quad +3nnC \qquad -\mu\nu D$$
$$-\mu\nu A \quad -\tfrac{3}{2}nnkC \quad -\tfrac{3}{2}nnkB$$
$$-\mu\nu B \quad -\tfrac{3}{2}nnkD \qquad +\tfrac{1}{24}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu k^3$$
$$-\mu\nu C$$
$$+\tfrac{1}{4}(3-\nu)(2-\nu)\mu k k$$

Pour satisfaire à ces équations soit:
$A = \mathfrak{A}\,k^4$; $B = \mathfrak{B}\,k^3$; $C = \mathfrak{C}\,k\,k + \mathfrak{c}\,k^4$; $D = \mathfrak{D}\,k^3$
& nous obtiendrons ces égalités:

$$(3\,n\,n - 2\,m - \mu\,\nu)\,\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{B}}{a\,a} + \tfrac{3}{2}\,n\,n\,\mathfrak{B}$$

$$-\frac{\mathfrak{B}}{a\,a} - \frac{3\,\mathfrak{C}}{a\,a} - 2\,m\,\mathfrak{B} + 3\,n\,n\,\mathfrak{B} - \mu\,\nu\,\mathfrak{B} - \tfrac{3}{2}\,n\,n\,\mathfrak{C} = 0$$

$$-\frac{4\,\mathfrak{C}}{a\,a} + (3\,n\,n - 2\,m - \mu\,\nu)\,\mathfrak{C} + \tfrac{1}{4}\,(3-\nu)\,(2-\nu)\,\mu = 0$$

$$-\frac{4\,\mathfrak{c}}{a\,a} - \frac{6\,\mathfrak{D}}{a\,a} + (3\,n\,n - 2\,m - \mu\,\nu)\,2 - \tfrac{3}{2}\,n\,n\,\mathfrak{D} - \tfrac{3}{2}\,n\,n\,\mathfrak{B} = 0$$

$$(3\,n\,n - 2\,m - \mu\,\nu - \frac{9}{a\,a})\,\mathfrak{D} - \frac{\mathfrak{C}}{a\,a} - \tfrac{3}{2}\,n\,n\,\mathfrak{C} + \tfrac{1}{24}\,(3-\nu)\,(2-\nu)\,(1-\nu)\,\mu = 0$$

soit $\frac{1}{a\,a} = m + (3-\nu)\,\mu + \frac{1}{8}\,(3-\nu)\,(2-\nu)\,(1-\nu)\,\mu\,k\,k = \mathrm{M}$
& nous trouverons:

$$\mathfrak{C} = \frac{(3-\nu)\,(2-\nu)\,\mu}{4\,(4\,\mathrm{M} - 3\,n\,n + 2\,m + \mu\,\nu)}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{-\,(3\,\mathrm{M} + \tfrac{3}{2}\,n\,n)\,\mathfrak{C}}{\mathrm{M} - 3\,n\,n + 2\,m + \mu\,\nu}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{(\mathrm{M} + \tfrac{3}{2}\,n\,n)\,\mathfrak{B}}{3\,n\,n - 2\,m - \mu\,\nu}$$

$\mathfrak{D} =$

$$\mathfrak{D} = \frac{-(M + \frac{3}{2} n n)\mathfrak{C} + \frac{1}{24}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu}{9M - 3nn + 2m + \mu\nu}$$

$$\mathfrak{c} = \frac{-(6M + \frac{3}{2} n n)\mathfrak{D} - \frac{3}{2} n n \mathfrak{B}}{4M - 3nn + 2m + \mu\nu}$$

Mais puisque μ eſt une quantité extremement petite, & k auſſi aſſés petit, il ſuffira dans ces formules de ſe ſervir de ces valeurs:
$M = m$; $nn = m$: ce qui donnera

$$\mathfrak{C} = \frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu}{12m}$$

$$\mathfrak{B} = -\frac{3}{2kk}\mathfrak{C} = -\frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu}{8kkm}$$

$$\mathfrak{A} = \frac{5}{2}\mathfrak{B} = -\frac{5(3-\nu)(2-\nu)\mu}{16kkm}$$

$$\mathfrak{D} = -\frac{5}{16}\mathfrak{C} + \frac{1}{192m}(3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu \text{ ou}$$

$$\mathfrak{D} = -\frac{5(2-\nu)(2-\nu) + (3-\nu)(2-\nu)(1-\nu)\mu}{192m} = -\frac{(4+\nu)(3-\nu)(2-\nu)\mu^3}{192m}$$

$$\mathfrak{c} = -\frac{5}{4}\mathfrak{D} - \frac{1}{2}\mathfrak{B} = \frac{+5(4+\nu)(3-\nu)(2-\nu)\mu}{384m} + \frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu}{16kkm}$$

Donc il y aura:

$$A = -\frac{5(3-\nu)(2-\nu)\mu kk}{16m};\ B = -\frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu k}{8m};$$

$$C = \frac{7(3-\nu)(2-\nu)\mu kk}{48m} \text{ \& } D = -\frac{(4+\nu)(3-\nu)(2-\nu)\mu k^3}{192m}$$

négligeant les termes qui contiennent k^4
ou puisqu'il ſera permis de negliger les termes, qui contiennent meme k^3, nous ſatisferons auſſi en faiſant $A = o, B = o$;

& $C = \frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu kk}{12m}$; de ſorte que nous ayons:

$\mathfrak{s} =$

$$\ddot{s} = \frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu k k}{12m} \operatorname{cof} 2v, \text{ \&c.}$$

$$r = c\left(1 + k \operatorname{cof} v + \frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu k k}{12m} \operatorname{cof} 2v\right)$$

$$d\omega = \alpha\, dv\,(1 + k \operatorname{cof} v) \text{ \&}$$

$$d\Phi = \frac{n\alpha\, dv\,(1 + k \operatorname{cof} v)}{\left(1 + k \operatorname{cof} v + \frac{(3-\nu)(2-\nu)\mu k k}{12m} \operatorname{cof} 2v\right)^2} \text{ ou bien}$$

$$d\Phi = \frac{n\alpha\, dv}{1 + k \operatorname{cof} v} - \frac{\frac{n\alpha}{6m}(3-\nu)(2-\nu)\mu k k\, dv \operatorname{cof} 2v}{(1 + k \operatorname{cof} v)^2}$$

Donc ſuppoſant $\frac{1 - \sqrt{(1-kk)}}{k} = f$ nous aurons

$$\Phi = C + \frac{n\alpha}{\sqrt{(1-kk)}}\left(v - 2f \operatorname{ſi} v + \tfrac{2}{2} ff \operatorname{ſi} 2v - \tfrac{2}{3} f^3 \operatorname{ſi} 3v + \text{\&c.}\right)$$

$$- \frac{n\alpha}{12m}(3-\nu)(2-\nu)\mu k k \operatorname{ſi} 2v$$

Or puiſque $\omega = \alpha v + \alpha k \operatorname{ſi} v$, nous aurons

$$\Phi = C + \frac{n\omega}{\sqrt{(1-kk)}} - \frac{n\alpha}{\sqrt{(1-kk)}}(2f + k) \operatorname{ſi} v + \frac{n\alpha ff}{\sqrt{(1-kk)}} k^2 \operatorname{ſi} 2v - \text{\&}$$

$$- \frac{n\alpha}{12m}(3-\nu)(2-\nu)\mu k k \operatorname{ſi} 2v.$$

donc negligeant les termes, qui renferment les inegalités du mouvement; le mouvement moyen de ce corps ſera $= \frac{n\omega}{\sqrt{(1-kk)}}$; & le mouvement de l'anomalie moyenne $= \frac{\omega}{\alpha}$: donc le mouvement moyen ſera au mouvement moyen de l'anomalie, comme

$$\frac{\alpha n}{\sqrt{(1-kk)}}$$

$\frac{\alpha n}{\sqrt{(1-kk)}}$ à 1: & par conſequent le mouvement de la ligne des abſides ſera au mouvement moyen comme $1 - \frac{\sqrt{(1-kk)}}{\alpha n}$ à 1: ou pendant une revolution entiere du corps M autour de C, la ligne des abſides avancera d'un angle $= (1 - \frac{\sqrt{(1-kk)}}{\alpha n})\, 360°$. Or des valeurs trouvées cy-deſſus nous aurons

$$\frac{1-kk}{\alpha\alpha nn} = \frac{m(1-kk) + (3-\nu)\,\mu\,(1-kk) + \frac{1}{8}(3-\nu)\,(2-\nu)\,(1-\nu)\,\mu\,k\,k}{m(1-kk) + \mu - \frac{1}{4}(3-\nu)\,(2+\nu)\,\mu\,k\,k}$$

ou diviſant par approximation:

$\frac{1-kk}{\alpha\alpha nn} = 1 - \frac{\mu(\nu-2)}{m}$ aſſés prés & $\frac{\sqrt{(1-kk)}}{\alpha n} = 1 - \frac{\mu(\nu-2)}{2m}$

& partant dans une révolution la ligne des abſides avancera d'un angle $= \frac{\mu(\nu-2)}{m}\, 180°$.

L'inegalité du mouvement, ou l'équation à ajouter à la longitude moyenne ſera

$$-(1 + \frac{\mu(\nu-2)}{2m})(2f+k)\,\text{ſi}\,v + (1 + \frac{\mu(\nu-2)}{2m})ff\,\text{ſi}\,2v - \tfrac{2}{3}f^3\,\text{ſi}\,3v + \&c.$$
$$- \frac{(3-\nu)\,(2-\nu)\,\mu\,k\,k}{12m}\,\text{ſi}\,2\,v$$

d'où l'on voit, combien ce mouvement s'ecarte de celui qui a été determiné dans la propoſ. precedente.

II. Hypotheſe

Soit $\frac{a\sqrt{}}{\Pi} = \frac{mc}{r}^{\frac{3+\mu}{2+\mu}}$, où μ marque une fraction extremement

petite:

petite: & partant on aura

$$\frac{a\,V}{\Pi} = \frac{m\,c^3}{r^2}\left(\frac{c}{r}\right)^{\mu} = \frac{m\,c^3}{r^2}\left(1 + \mu\, l\frac{c}{r} + \tfrac{1}{2}\mu\mu\,(l\frac{c}{r})^2 + \&c.\right)$$

& par conſéquent

$$R = \frac{m\,\mu\,c^3}{r\,r}\; l\,\frac{c}{r} \;+\; \frac{m\,\mu\,\mu\,c^3}{2\,r\,r}\;(l\frac{c}{r})^2 \;+\; \&c.$$

ou bien

$$R = -\frac{\mu\,m\,c}{(1 + k\,\mathrm{cof}\,v + s)^2}\left(l(1+k\,\mathrm{cof}\,v+s) \tfrac{1}{2}\mu\,(l(1+k\,\mathrm{cof}\,v+s))^2 + \&c\right)$$

mais puiſque μ & k ſont des quautités fort petites on pourra ſuppoſer $l\,(1 + k\,\mathrm{cof}\,v + s) = k\,\mathrm{cof}\,v + s$ & partant

$$R = -\frac{\mu\,m\,c\,k\,\mathrm{cof}\,v - \mu\,m\,c\,s}{(1 + k\,\mathrm{cof}\,v + s)^2} = -\frac{\mu\,m\,c\,k\,\mathrm{cof}\,v - \mu\,m\,c\,s}{(1 + k\,\mathrm{cof}\,v)^2} + \frac{2\,\mu\,m\,c\,k\,s\,\mathrm{cof}\,v}{(1 + k\,\mathrm{cof}\,k)^3}$$

ou $$\frac{R\,(1 + k\,\mathrm{cof}\,v)^3}{c} = -\mu\,m\,k\,\mathrm{cof}\,v - \mu\,m\,k\,k\,\mathrm{cof}\,v^2 - \mu\,m\,s + \mu\,m\,k\,s\,\mathrm{cof}\,v$$

& l'equation trouvée ſe changera en cette forme.

$$0 = \frac{d\,d\,s}{dv^2}\,(1 + k\,\mathrm{cof}\,v) + \frac{k\,d\,s}{d\,v}\,\mathrm{ſi}\,v - 2\,\alpha\,\alpha\,m\,s + \frac{3\,\alpha\,\alpha\,n^2\,s}{1 + k\,\mathrm{cof}\,v}$$

$$- \alpha\,\alpha\,\mu\,m\,s + \alpha\,\alpha\,\mu\,m\,k\,s\,\mathrm{cof}\,v$$

$$- k\,k + \alpha\,\alpha\,m - \alpha\,\alpha\,n\,n - \tfrac{1}{2}\,\alpha\,\alpha\,\mu\,m\,k\,k$$

$$- k\,\mathrm{cof}\,v + \alpha\,\alpha\,m\,k\,\mathrm{cof}\,v - \alpha\,\alpha\,\mu\,m\,k\,\mathrm{cof}\,v$$

$$- \tfrac{1}{2}\,\alpha\,\alpha\,\mu\,m\,k\,k\,\mathrm{cof}\,2\,v$$

où nous ferons:

$$\alpha\,\alpha\,n\,n = \alpha\,\alpha\,m - k\,k - \tfrac{1}{2}\,\alpha\,\alpha\,\mu\,m\,k\,k \;\&$$

$$\frac{1}{\alpha\,\alpha} = m - \mu\,m$$

donc $n\,n = m\,(1 - k\,k) + \mu\,m\,k\,k - \tfrac{1}{2}\,\mu\,m\,k\,k$

& l'equation ſuperieure en negligeant les termes trop petits deviendra etant diviſée par $\alpha\,\alpha$:

$$m\,(1 - \mu)$$

$n(1-\mu)\frac{d\,d\,s}{dv^2} + m\,s - \mu\,m\,s - \frac{1}{2}\mu\,m\,k\,k\,\text{cof}\,2\,v = 0$

Donc posant $s = A\,k\,k\,\text{cof}\,2\,v$ on aura

$-4\,A(1-\mu) + A(1-\mu) - \frac{1}{2}\mu = 0$

ou $A = -\frac{\mu}{3(2-\mu)}$ & partant

$$s = -\frac{\mu\,k\,k}{3(1-\mu)}\,\text{cof}\,2\,v$$

$$r = c\left(1 + k\,\text{cof}\,v - \frac{\mu\,k\,k}{3(1-\mu)}\,\text{cof}\,2\,v\right)$$

$$\omega = \alpha\,v + \alpha\,k\,\text{fi}\,v$$

$$d\,\Phi = \frac{n\,\alpha\,d\,v\,(1 + k\,\text{cof}\,v)}{\left(1 + k\,\text{cof}\,v - \frac{\mu\,k\,k}{3(1-\mu)}\,\text{cof}\,2\,v\right)^2}$$

ou $d\,\Phi = \frac{n\,\alpha\,d\,v}{1 + k\,\text{cof}\,v} + \frac{2\,n\,\alpha\,\mu\,k\,k}{3(1-\mu)}\,d\,v\,\text{cof}\,2\,v$ & en integrant

posant $f = \frac{1 - \sqrt{(1-k\,k)}}{k}$

$$\Phi = C + \frac{n\,\alpha}{\sqrt{(1-k\,k)}}(v - 2f\,\text{fi}\,v + ff\,\text{fi}\,2\,v - \&c.) + \frac{n\,\alpha\,\mu\,k\,k\,\text{fi}\,2\,v}{3(1-\mu)}$$ ou

$$\Phi = C + \frac{n\,\omega}{\sqrt{(1-k\,k)}} - \frac{n\,\alpha}{\sqrt{(1-k\,k)}}(2f + k)\,\text{fi}\,v + \frac{n\,\alpha\,ff}{\sqrt{(1-k\,k)}}\,\text{fi}\,2\,v$$
$$+ \frac{n\,\alpha\,\mu\,k\,k}{3(1-\mu)}\,\text{fi}\,2\,v$$

Donc le mouvement moyen eſt au mouvement de l'anomalie moyenne comme $\frac{n\,\alpha}{\sqrt{(1-k\,k)}}$ à 1, & le mouvement de la ligne des abſides

abſides étant au mouvement moyen comme $1 - \frac{\sqrt{(1-kk)}}{\alpha n}$ à 1. puisque

$$\frac{1-kk}{\alpha\alpha nn} = \frac{1-kk-\mu+\mu kk}{1-kk+\frac{1}{2}\mu kk} = 1 - \mu$$

cette raiſon ſera comme $\frac{1}{2}\mu$ à 1, & par conſéquent pendant une révolution entiére la ligne des abſides avancera d'un angle $= \mu$. 180°. Et l'inegalité du mouvement, ou la proſtaphereſe ſera

$$-(1+\tfrac{1}{2}\mu)\,(2f+k)\,\text{ſi}\,v + (1+\tfrac{1}{2}\mu)\,ff\,\text{ſi}\,2v - \tfrac{2}{3}f^3\,\text{ſi}\,3v \;\&$$
$$+\frac{\mu\,(1+\frac{1}{2}\mu)}{3\,(1-\mu)}\,kk\,\text{ſi}\,2v$$

de ſorte que dans l'une ou l'autre hypotheſe on eſt en etat de connoitre le mouvement aſſés exactement. C. Q. F. T.

AUTRE SOLUTION.

Après être parvenu a cette équation :

$$d.\frac{dr}{d\omega} - \frac{nnc^4\,d\omega}{r^3} + \frac{mc^3\,d\omega}{rr} + R\,d\omega = 0$$

ayant déja trouvé $d\Phi = \frac{nc\,dv}{rr}$, au lieu de ſuppoſer $d\omega = \alpha\,dv\,(1+\cos v)$, mettons pour rendre les expreſſions de $d\omega$ & de r plus ſemblables :

$$d\omega = \alpha\,dv\,(1+k\cos v+s)$$

& $r = c\,(1+k\cos v+s)$

ou $d\omega = \frac{\alpha r\,dv}{c}$; ce qui donne $\frac{dr}{d\omega} = \frac{c\,dr}{\alpha r\,dv}$, & ſuppoſant dv conſtant, $d.\frac{dr}{d\omega} = \frac{cr\,ddr - c\,dr^2}{\alpha r r\,dv}$, & les équations trouvées ſe changeront en :

$$d\Phi = \frac{\alpha nc\,dv}{r} = \frac{\alpha n\,dv}{1+k\cos v+s}$$

$$\frac{crddr - cdr^2}{\alpha r r dv} - \frac{\alpha n n c^3 dv}{rr} + \frac{\alpha m c^2 dv}{r} + \frac{\alpha R r dv}{c} = 0$$

ou $$\frac{r ddr - dr^2}{\alpha^2 dv^2} - nnc^2 + mcr + \frac{R r^3}{cc} = 0$$

Or ayant posé $r = c(1 + k \cos v + s)$ nous aurons :

$$dr = c(ds - k dv \sin v)$$

$$\& \; ddr = c(dds - k dv^2 \cos v)$$

Donc :

$$rddr - dr^2 = cc(dds + kdds\cos v + sdds - ds^2 + 2kdsdv\sin v - kdv^2\cos v - ksdv^2\cos v - k^2 dv^2)$$

& faisant la substitution on aura :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dds}{\alpha^2 dv^2} + \frac{kdds\cos v}{\alpha^2 dv^2} + \frac{s\,dds}{\alpha^2 dv^2} - \frac{ds^2}{\alpha^2 dv^2} + \frac{2kds\sin v}{\alpha^2 dv} - \frac{ks\cos v}{\alpha} + ms \\ &- \frac{kk}{\alpha\alpha} - nn + m + \frac{R}{c}(1 + k\cos v + s)^3 \\ &- \frac{k\cos v}{\alpha\alpha} + mk\cos v. \end{aligned}\right\} = 0.$$

Puisque R & s sont par l'hypothese des quantités fort petites, quelque forme qu'ait la lettre R, on parviendra toujours à une telle expression

$$\frac{R}{c}(1 + k\cos v + s)^3 = A + Bc^1\cos v + Cc^2\cos 2v + Dc^3\cos 3v \ldots + S$$

où S marque une fonction quelconque de s.

Faisons donc :

$$nn = m - \frac{kk}{\alpha\alpha} + A \;\&\; \frac{1}{\alpha\alpha} = m + B$$

ce qui donne $nn = m(1 - kk) + A - Bkk$

& l'equation qui reste à résoudre sera :

$$0 = \frac{(m+B)dds(1 + k\cos v + s)}{dv^2} - \frac{(m+B)ds^2}{dv^2} + \frac{2(m+B)kds\sin v}{dv^2}$$

$$- mks\cos v - Bks\cos v + ms + (k^2\cos 2v + Dk^3 v\cos \ldots + S)$$

de laquelle il ne sera pas difficile de trouver la valeur de S à peu prés, parceque tant s que k & S sont des quantités fort petites.

Or

Or ſi S eſt donné par l'angle v, on parviendra toujours à une telle forme:

$$S = M k^2 \cos 2v + N k^3 \cos 3v \text{ \&c.}$$

& partant nous aurons:

$$r = c\,(1 + k\cos v + M k^2 \cos 2v + N k^3 \cos 3v + \text{\&c.})$$

$$\& \; d\omega = a\,dv\,(1 + k\cos v + M k^2 \cos 2v + N k^3 \cos 3v + \text{\&c.})$$

$$\text{donc } \omega = a\,(v + k \sin v + \tfrac{1}{2} M k^2 \sin 2v + \tfrac{1}{3} N k^3 \sin 3v + \text{\&c.})$$

où $\frac{\omega}{a}$ marque l'anomalie moienne de la Planete M: qui etant nommée $= u$ on aura

$$u = \frac{\omega}{a} = v + k \sin v + \tfrac{1}{2} M k^2 \sin 2v + \tfrac{1}{3} N k^3 \sin 3v + \text{\&c.}$$

Donc l'anomalie moienne u ſera $= o$, où la Planete ſe trouvera à ſa plus haute abſide, toutes les fois, que $v = o$, ou 360°, ou 2. 360° &c.

Depuis ayant $d\Phi = \frac{a\,n\,d\,v}{1 + k\cos v + M k^2 \cos 2v + N k^3 \cos 3v}$ &c.

on en trouvera

$$d\Phi = a\,n\,dv\,(1 - k\cos v + \tfrac{1}{2}\,kk - \tfrac{3}{4}\,k^3 \cos v + \tfrac{1}{2}\,kk\cos 2v - \tfrac{1}{4}\,k^3 \cos 3v - M kk \cos 2v + M k^3 \cos v + M k^3 \cos 3v - N k^3 \cos 3v \text{ \&c.}$$

& à peu prés

$$d\Phi = a\,n\,dv\,\left(\frac{1}{\sqrt{(1-kk)}} - k\cos v\,(1 + \tfrac{3}{4}k^2 - M k^2) + kk\cos 2v\,(\tfrac{1}{2} - M)\right)$$

Le mouvement moien ſera donc $= \frac{a\,n}{\sqrt{(1-kk)}}\,v = \frac{n\,\omega}{\sqrt{(1-kk)}}$

& le mouvement moien de cette Planete ſera au mouvement de ſon anomalie comme $\frac{a\,n}{\sqrt{(1-kk)}}$ à 1, & le mouvement moyen ſera au

mouvement de la ligne des abſides comme $\frac{\alpha n}{V(1 - kk)}$ à $\frac{\alpha n}{V(1 - kk)} - 1$, ou comme 1 à $1 - \frac{V(1 - kk)}{\alpha n}$.

Mais $\frac{1}{\alpha\alpha mm} = \frac{m + B}{m(1-kk) + A - Bkk}$ & $\frac{1-kk}{\alpha\alpha nn} = \frac{m(1-kk) + B - Bkk}{m(1-kk) + A - Bkk}$ $= 1 + \frac{B - A}{m(1 - kk)}$, donc $\frac{V(1 - kk)}{\alpha n} = 1 - \frac{\frac{1}{2}(A - B)}{m(1 - kk)}$; Par conſéquent le mouvement de la ligne des abſides ſera au mouvement moien comme $\frac{A - B}{2m(1 - kk)}$ à 1, & pendant une révolution entiere la ligne des abſides avancera d'un angle $= \frac{A - B}{m(1-kk)} \cdot 180°$, cequi revient à la ſolution precedente. L'inegalité du mouvement ſe déterminera auſſi comme auparavant; mais la premiere ſolution a cet avantage ſur celle-cy, que l'angle v eſt plus aiſement trouvé par l'anomalie moienne u. C. Q. F. T.

Coroll. 1.

XLVI. On voit par là que ſi $\nu = 3$ ou $V = \frac{\Pi}{a}\left(\frac{mc^3}{rr} + \frac{\mu c^4}{r^3}\right)$ on aura $\alpha\alpha = \frac{1}{m}$ & $nn = m(1 - kk) + \mu$, & $s = o$. Deſorte que $r = c(1 + k\cos v)$; $d\omega = \frac{1}{V m} dv(1 + k\cos v)$; $d\Phi = \frac{n d\omega}{(1 + k\cos v)^2} = \frac{dk}{1 + k\cos v} V(1 - kk + \frac{\mu}{m})$. Dans ce cas donc le Corps ſe mouvra dans une ellipſe ſuivant les regles de Kepler, mais la ligne des abſides ne demeurera pas en repos.

Coroll.

Corolл. 2.

XLVII. Pour trouver le mouvement des abſides, on n'a qu'à conſiderer le mouvement moien de l'anomalie, qui ſera $= \omega \sqrt{m}$ puisque $\omega \sqrt{m} = v + k \int v$, Et le mouvement vrai etant $\varphi = v \sqrt{(1 + \frac{\mu}{m(1-kk)})}$ + &c. le mouvement moien ſera à celui de l'anomalie comme $\sqrt{(1 + \frac{\mu}{m(1-kk)})}$ à 1, & partant le mouvement moyen au mouvement des abſides, comme $\sqrt{(1 + \frac{\mu}{m(1-kk)})} - 1$ à 1, ou comme 1 à $\frac{1}{\sqrt{(1 + \frac{\mu}{m(1-kk)})} - 1}$, de ſorte que pendant une révolution la ligne des abſides avance d'un angle de $\frac{360}{\sqrt{(1 + \frac{\mu}{m(1-kk)})} - 1}$ degrés.

Scholie 2.

XLVIII. Il ſeroit trop long de développer tout ce que les formules trouvées renferment; & je me contente d'avoir montré le chemin pour parvenir à des formules, qui conduiſent à une telle connoiſſance du mouvement, qu'on deſire dans l'Aſtronomie. Car quoiqu'on puiſſe d'abord integrer l'équation: $ddr - \frac{nnc^4 d\omega^2}{r^3} + \frac{mc^3 d\omega^2}{rr} + R d\omega^2 = o$, en la multiplicant par dr; ſon integrale n'apportera presque aucun uſage au profit de l'Aſtronomie, vu que ce n'eſt pas la diſtance r qu'on peut regarder comme connue; mais on doit plutot déterminer cette diſtance par l'angle ω, qui eſt pro-

portionnel au mouvement moien. Pour cet effet la maniere d'approximer, dont je me ſuis ſervi, eſt bien préferable à la methode directe ; puisqu'elle nous met en état de déterminer tant la diſtance r, que l'angle φ par le ſeul angle ω, qui eſt connu. Et comme cela ſe fait par le moyen de l'anomalie excentrique v, on en pourra aiſément conſtruire des Tables telles, qu'on eſt dejà accoutumé d'avoir dans l'Aſtronomie; & qui donnent à connoitre le mouvement des Planetes auſſi aiſément, qu'on peut ſouhaiter.

Scholie 2.

XLIX. Aprés avoir déterminé les quantités conſtantes α & n, enſorte que les plus grands termes de l'équation ſe détruiſent d'eux mêmes, & qu'il n'y reſte que des termes extrémement petits, qui réſultent de R, de ſorte qu'il ſera permis de negliger les puiſſances de la lettre inconnue s, comme auſſi les termes, qui renferment des puiſſances de l'excentricité k; il ne ſera plus difficile d'en découvrir la veritable valeur de cette lettre s. On ſe pourra ſervir ou de la methode indirecte, dont je me ſuis ſervi pour approcher à cette valeur, ou l'on pourra auſſi employer avec ſuccés la methode directe. L'equation à laquelle on parvient aura toujours cette forme:

$$0 = \frac{dds}{dv^2}(1+k\cos v)+\frac{k\,ds}{dv^2}\sin v+\frac{s(1-2k\cos v-3kk)}{1+k\cos v}-P$$

où P marque les termes connus, qui ne renferment pas la lettre s, puisque nous avons à peu pres $\alpha^2 m = 1$ & $\alpha^2 nn = 1-kk$.

Suppoſons $s = \frac{t\sin v}{1+k\cos v}$ & nous aurons

$$ds = \frac{dt\sin v}{1+k\cos v}+\frac{t\,dv(\cos v+k)}{(1+k\cos v)^2}$$

$$dds = \frac{1+k\cos v}{ddt\sin v}+\frac{2dtdv(\cos v+k)}{(1+k\cos v)^2}-\frac{t\,dv^2\sin v(1-k\cos v-2kk)}{(1+k\cos v)^3}$$

Ces valeurs étant ſubſtituées, nous obtiendrons:

$ddt\sin v+$

$$ddt\,\mathrm{sin}\,v + \frac{dt(3k + 2\cos v - k\cos v^2)}{1 + k\cos v}\,dv = P\,dv^2$$

Multiplions par $\frac{\mathrm{sin}\,v}{(1+k\cos v)^3}$ & l'integrale ſera

$$\frac{dt\,\mathrm{sin}\,v^2}{(1+k\cos v)^3} = dv\int\frac{P\,dv\,\mathrm{sin}\,v}{(1+k\cos v)^3} \;\&\; dt = \frac{dv(1+k\cos v)^3}{\mathrm{sin}\,v^2}\int\frac{P\,dv\,\mathrm{sin}\,v}{(1+k\cos v)^3}$$

Delà on aura donc

$$t = \int\frac{dv(1+k\cos v)^3}{\mathrm{sin}\,v^2}\int\frac{P\,dv\,\mathrm{sin}\,v}{(1+k\cos v)^3}$$

& par conſéquent $s = \frac{t\,\mathrm{sin}\,v}{1+k\cos v}$

Deſorte que la valeur de la lettre s ſe pourra exactement déterminer par l'anomalie excentrique v, qui eſt connue. Mais ayant montré ces artifices, je m'en vais donner tout court les ſolutions des problemes ſuivans, en me contentant de les reduire à des équations, qui ſemblent etre les plus propres pour l'Aſtronomie.

Scholie 3.

L. Puisque dans cette operation la valeur de s ſe trouve par une double integration, & que par conſéquent il y entre deux quantités conſtantes arbitraires, il faut avertir comment ces quantités conſtantes doivent etre déterminées. Or ayant poſé $r = c(1+k\cos v+s)$ il eſt d'abord clair que l'expreſſion trouvée pour s ne doit renfermer aucune quantité abſolument conſtante, parcequ' elle augmenteroit ou diminueroit la diſtance moyenne c, qui eſt deja ſuppoſée connue: & par cette conſideration on déterminera une des deux dites quantités conſtantes. En ſecond lieu, il eſt clair que l'expreſſion de s ne doit renfermer aucun terme de cette forme $b\cos v$, puisqu'un tel eſt déjà ſuppoſé être compris dans $k\cos v$, où k marque l'excentricité de l'orbite, qu'on regarde comme connue: & par là on déterminera auſſi l'autre conſtante arbitraire. Donc ſi aprés les deux integrations on trouve une telle expreſſion pour $s = A + B\cos v + C$

$+ C \cos 2v + D \cos 3v +$ &c. on doit prendre telles valeurs pour les deux quantités conſtantes mentionnées, que les deux lettres A & B deviennent evanouïſſantes: & cette même regle ſe doit obſerver dans les integrations, qu'on ſera dans les problemes ſuivants. On voit auſſi, que dans la ſeconde integration, qui donne s, on n'y doit pas ajouter de conſtante: ou que s ne doit pas renfermer de terme purement conſtant: car dans ce cas l'expreſſion, qui réſulteroit pour s, contiendroit un terme de cette forme $g \sin v$, qui marqueroit que l'angle v ne fut pas pris depuis l'aphelie: & cette condition doit être remplie préferablement à la ſeconde; de ſorte que celle-cy jointe à la premiére ſervira à déterminer les deux conſtantes.

Pour faire mieux ſentir la préference de cette ſeconde condition ſur la premiere, on n'a qu'à conſiderer, que l'excentricité k ſe détermine deja par l'equation $d\omega = \alpha\, dv\,(1 + k \cos v)$, qui exprime le rapport du mouvement de la Planete au mouvement moyen de la Terre: & partant il pourra bien arriver que dans l'expreſſion de la diſtance $r = c\,(1 + C \cos v +$ &c.) le coëfficient du terme $\cos v$ ne ſoit pas preciſement égal à l'excentricité k, de ſorte que l'expreſſion integrale

$$s = A + B \cos v + C \cos 2v + D \cos 3v +$$ &c.

pourroit bien ſubſiſter, quand même il n'y auroit $B = 0$, pourvu que $A = 0$. Mais on voit bien, que s'il y entroit dans cette expreſſion un terme, comme $H \sin v$, les deux termes par exemple $G \cos v + H \sin v$ ſeroient equivalens à un tel $L \cos (v + \delta)$, qui ne marqueroit autre choſe que ce que l'anomalie v ne ſeroit pas contée depuis l'aphelie même, & cette difference ne changeroit rien dans le calcul. Pourvu donc qu'on ait egard à ces circonſtances, on ne ſera plus embaraſſé au ſujet des quantités conſtantes, que la double integration entraine dans le calcul.

PROBLEME 4.

LI. *Un corps etant ſollicité par des forces quelconques, dont les directions ſe trouvent pourtant toujours dans le même plan, où le corps ſe meut; déterminer le mouvement du corps.*

SOLUTION.

SOLUTION.

Puisque nous ſuppoſons, que les directions des forces ſollici- Fig. 3.
tantes ſe trouvent toujours dans le même plan, on voit d'abord, que pourvu que le corps ait une fois commencé ſon mouvement dans ce plan, il ne s'en écartera jamais. Que le plan de la Planche repreſente donc ce plan, où ſe fait le mouvement du corps par la ligne courbe A M: & qu'on rapporte ce mouvement au point fixe C, vers lequel ſoit dirigée conſtamment la force principale de celles qui agiſſent ſur le corps; comme s'il s'agit d'une Planete principale, C ſera le centre du Soleil; mais ſi la queſtion roule ſur quelque Satellite, on placera ce point C dans le centre de ſa principale. Cela remarqué, ſuppoſons que le corps, aprés un tems $= t$, ſoit parvenu en M, & rapportons ſon lieu à la direction fixe C, nommant l'angle A C M $= \varphi$, & la diſtance C M $= r$. Maintenant, de quelques forces que le corps en M ſoit ſollicité, elles ſe reduiront toujours à deux, dont l'une agiſſe ſelon la direction M C, & l'autre ſelon la direction M Q perpendiculaire à M C: ſoit

la force qui agit ſelon M C $=$ P
la force qui agit ſelon M Q $=$ Q

De plus, du point M tirons M P perpendiculaire & M V parallele à C A: & nommons les coordonnées

$$C P = x \quad \& \quad P M = y.$$

& nous aurons $x = r$ cof φ & $y = r$ ſi φ: ſuivant ces memes directions décompoſons les deux forces P & Q & la force M C $=$ P donnera

ſuivant la direction M V une force $=$ P cof φ
ſuivant la direction M P une force $=$ P ſi φ

De même la force M Q $=$ Q donnera

ſuivant la direction M v une force $=$ Q ſi φ
ſuivant la direction M P une force $=$ Q cof φ

& partant le corps en M ſera pouſſé de deux forces ſuivant les directions conſtantes M V & M P; qui ſoient repreſentées par les lignes M x & M y, & nous aurons

la force M $x = P \cos \varphi - Q \sin \varphi$

la force M $y = P \sin \varphi + Q \cos \varphi$.

d'où le *lemme* propoſé cy-deſſus nous fournira ces deux équations :

$$\frac{2\,d\,dx}{dt^2} = -P\cos\varphi + Q\sin\varphi$$

$$\frac{2\,d\,dy}{dt^2} = -P\sin\varphi - Q\cos\varphi$$

d'où nous tirerons :

$$P = -\frac{2}{dt^2}(ddx\cos\varphi + ddy\sin\varphi) \;\&$$

$$Q = \frac{2}{dt^2}(ddx\sin\varphi - ddy\cos\varphi)$$

Or puiſque $x = r\cos\varphi$ & $y = r\sin\varphi$, nous aurons $dx = dr\cos\varphi - r\,d\varphi\sin\varphi$ & $dy = dr\sin\varphi + r\,d\varphi\cos\varphi$ & de là $ddx = ddr\cos\varphi - 2dr\,d\varphi\sin\varphi - r\,dd\varphi\sin\varphi - r\,d\varphi^2\cos\varphi$

$ddy = ddr\sin\varphi + 2dr\,d\varphi\cos\varphi + r\,dd\varphi\cos\varphi - r\,d\varphi^2\sin\varphi$

ces valeurs etant remiſes donneront :

$$P = -\frac{2}{dt^2}(ddr - r\,d\varphi^2)$$

$$\& \; Q = \frac{2}{dt^2}(-2\,dr\,d\varphi - r\,dd\varphi)$$

& partant la ſolution du probleme dépendra de ces deux équations :

I. $ddr - r\,d\varphi^2 = -\frac{1}{2}P\,dt^2$

II. $2\,dr\,d\varphi + r\,dd\varphi = -\frac{1}{2}Q\,dt^2$

où l'element dt eſt ſuppoſé conſtant, au lieu duquel on pourra introduire le mouvement moyen du Soleil ω, en poſant $\frac{1}{2}dt^2 = \frac{a\,d\omega^2}{\Pi}$: où a marque la diſtance moyenne de la Terre

au

au Soleil, & Π la force, dont la Terre eſt pouſſée vers le Soleil à cette même diſtance; & alors on aura ces deux équations;

$$\text{I.}\quad d\,dr \;-\!-\; r\,d\Phi^2 + \frac{a\,P\,d\omega^2}{\Pi} = 0$$

$$\text{II.}\quad 2\,dr\,d\Phi + r\,d\,d\Phi + \frac{a\,Q\,d\omega^2}{\Pi} = 0$$

C. Q. F. T.

Scholie.

LII. La ſolution des ces équations dépend principalement de la nature des fonctions P & Q, dont les forces, qui agiſſent ſur le corps, ſont exprimées. Mais en général il ne ſe préſente rien de remarquable à developper au ſujet de ces équations. Cependant, ſi nous connoiſſions d'ailleurs déjà le mouvement du corps M, à l'aide de ces formules nous pourrions réciproquement déterminer les forces, dont ce corps ſera ſollicité; ce qui ne manquera pas d'apporter un grand avantage dans l'Aſtronomie, quand on ſe trouvera en etat de déduire des obſervations les petites irregularités, auxquelles le mouvement des Planetes eſt ſujet, pour en connoitre, combien les forces, qui agiſſent actuellement ſur les Planetes, ſont differentes de celles qu'on ſuppoſe dans la Theorie.

Probleme 5.

LIII. *Un corps en* M *etant ſollicité par des forces quelconques, dont la principale ſoit dirigée vers le point* C, *déterminer ſon mouvement.* Fig. 4.

Solution.

Puisque le mouvement de ce corps ne ſe fera point dans un même plan, qu'on choiſiſſe à volonté un plan, qui paſſe par le point C, auquel on rapporte le mouvement de ce corps: & ce plan ſoit repreſenté par celui de la Planche: auquel on baiſſe du point M la perpendiculaire M R, & ayant pris dans ce même plan une ligne

fixe C A pour axe, & y ayant mené de R la perpendiculaire R P, qu'on nomme les trois coordonnées: C P $= x$; P R $= y$ & R M $= z$. Outre cela ſoit la diſtance raccourcie C R $= r$, & l'angle A C R $= \varphi$; d'où nous tirons $x = r \cos \varphi$ & $y = r \sin \varphi$. Enſuite les forces, qui agiſſent ſur le corps en M, ſe reduiront à une, dont la direction eſt perpendiculaire au plan A C R, & à d'autres, dont les directions ſe trouveront dans ce plan même, ou plutot dans un plan qui paſſant par M lui eſt parallele. Ces dernieres forces pourront outre cela être réduites à deux directions, dont l'une ſera R C, & l'autre R Q perpendiculaire à R C, de ſorte que nous n'aurons que trois forces à conſiderer, ſavoir: M z, R C & R Q: que nous nommerons:

la force R C $= P$
la force R Q $= Q$
la force M R $= R$.

Les deux premieres forces étant dans le plan A C R, auquel nous rapportons le mouvement, nous en tirerons les mêmes équations, que nous avons trouvées dans la ſolution du probleme precedent. Et partant ſi au lieu de l'élement du tems dt, nous introduiſons le mouvement moyen du Soleil, qui ſoit $= d\omega$: & que nous poſions la diſtance moyenne de la terre au Soleil $= a$ & la force du Soleil ſur la Terre $= \Pi$, nous aurons ces deux équations; en ſuppoſant $d\omega$ conſtant:

$$\text{I.}\quad d\,dr - r\,d\varphi^2 + \frac{a P\, d\omega^2}{\Pi} = 0$$

$$\text{II.}\quad 2\,dr\,d\varphi + r\,d\,d\varphi + \frac{a Q\, d\omega^2}{\Pi} = 0.$$

Or la troiſiéme force R donnera cette équation

$$\frac{2\,d\,dz}{dt^2} = -R \text{ ou } d\,dz + \frac{a R\, d\omega^2}{\Pi} = 0:$$

qui exprime pour chaque inſtant la diſtance du corps M au plan A C R. Pour mieux connoitre l'obliquité de ce mouvement, pendant

dant que le corps paſſe par l'element M m, concevons un plan qui paſſe cet element M m & le point C, pour avoir le plan, dans lequel le corps ſe meut dans cet inſtant. Soit C Ω l'interſection de ce plan avec le plan A C R, & C Ω nous repreſentera la ligne des noeuds. De plus, ayant tiré du point R ſur C Ω la perpendiculaire R S, & outre cela la ligne M S, l'angle M S R repreſentera l'inclinaiſon du plan C S M, dans lequel le corps M ſe meut actuellement dans cet inſtant, au plan fixe A C R: ſoit donc, pour appliquer le calcul à la ſituation de ce plan:

l'angle A C $\Omega = \pi$

& l'inclinaiſon, ou l'angle, R S M $= \varrho$.

De là nous aurons l'angle Ω C R $= \Phi - \pi$, & partant R S $= r$ ſi $(\Phi - \pi)$ & C S $= r$ coſ $(\Phi - \pi)$. Enſuite la conſideration de l'angle R S M $= \varrho$ donnant R M $=$ R S tang ϱ, nous fournira cette équation:

$$z = r \text{ ſi } (\Phi - \pi) \text{ tang } \varrho$$

d'où nous tirons par la differentiation;

$$dz = dr \text{ ſi } (\Phi - \pi) \text{ tang } \varrho + r\,(d\Phi - d\pi) \text{ coſ } (\Phi - \pi) \text{ tang } \varrho + \frac{r\,d\varrho \text{ ſi } (\Phi - \pi)}{\text{coſ } \varrho^2}$$

Mais il faut conſiderer, que pendant que le corps ſe meut par l'element M m, tant la ligne des noeuds C Ω que l'inclinaiſon R S M demeure invariable, & partant, la valeur de dz doit etre juſte, quand même on ſuppoſeroit π & ϱ conſtantes; de ſorte que nous ayons:

$$dz = dr \text{ ſi } (\Phi - \pi) \text{ tang } \varrho + r\,d\Phi \text{ coſ } (\Phi - \pi) \text{ tang } \varrho$$

& par conſéquent:

$$r\,d\pi \text{ coſ } (\Phi - \pi) \text{ tang } \varrho = \frac{r\,d\varrho \text{ ſi } (\Phi - \pi)}{\text{coſ } \varrho^2} \text{ ou } d\varrho = \frac{d\pi \text{ ſi } \varrho \text{ coſ } \varrho}{\text{tang } (\Phi - \pi)}.$$

& partant $d.$ tang $\varrho = \dfrac{d\,\varrho}{\text{coſ } \varrho^2} = \dfrac{d\,\pi \text{ tang } \varrho}{\text{tang } (\Phi - \pi)}$.

Cherchons maintenant auſſi la valeur du differentio-differentiel ddz, & nous trouverons ſelon les régles

$$d\,dz = \text{tang}\,\varrho\ \text{d.}\ (dr\,\text{ſi}\,(\Phi-\pi) + r\,d\Phi\,\text{cof}\,(\Phi-\pi)) + (dr\,\text{ſi}\,(\Phi-\pi) + r\,d\Phi\,\text{cof}\,(\Phi-\pi))\ d.\ \text{tang}\,\varrho$$

c'eſt à dire

$$ddz = \text{tang}\,\varrho\Big(\begin{matrix} d\,dr\,\text{ſi}\,(\Phi-\pi) + dr\,(d\Phi-d\pi)\,\text{cof}\,(\Phi-\pi) \\ +rdd\Phi\,\text{cof}\,(\Phi-\pi)+drd\Phi\,\text{cof}\,(\Phi-\pi)-rd\Phi\,(d\Phi-d\pi)\,\text{ſi}\,(\Phi-\pi)\end{matrix}\Big) + dr\,d\pi\,\text{cof}\,(\Phi-\pi) + \frac{r\,d\Phi\,d\pi\,\text{cof}\,(\Phi-\pi)}{\text{tang}\,(\Phi-\pi)}$$

laquelle expreſſion ſe réduit en cette forme

$$ddz = \text{tang}\,\varrho\,(ddr\,\text{ſi}\,(\Phi-\pi) + 2\,dr\,d\Phi\,\text{cof}\,(\Phi-\pi) + r\,dd\Phi\,\text{cof}\,(\Phi-\pi)) - r\,d\Phi^2\,\text{ſi}\,(\Phi-\pi) + \frac{r\,d\Phi\,d\pi}{\text{ſi}\,(\Phi-\pi)}$$

Mais ici je remarque d'abord les mêmes formules, qui ſe trouvent dans les deux premiéres équations; mettant donc

$$d\,dr - r\,d\Phi^2 = -\frac{a\,P\,d\omega^2}{\Pi}$$

$$\&\ 2\,dr\,d\Phi + r\,dd\Phi = -\frac{a\,Q\,d\omega^2}{\Pi}$$

nous aurons:

$$ddz = \text{tang}\,\varrho\Big(\frac{-a\,P\,d\omega^2}{\Pi}\,\text{ſi}\,(\Phi-\pi) - \frac{a\,Q\,d\omega^2}{\Pi}\,\text{cof}\,(\Phi-\pi) + \frac{r\,d\Phi\,d\pi}{\text{ſi}\,(\Phi-\pi)}\Big)$$

& puiſque $d\,dz + \frac{a\,R\,d\omega^2}{\Pi} = 0$, il en réſultera cette équation:

$$\frac{a\,R\,d\omega^2}{\Pi\,\text{tang}\,\varrho} - \frac{a\,P\,d\omega^2}{\Pi}\,\text{ſi}\,(\Phi-\pi) - \frac{a\,Q\,d\omega^2}{\Pi}\,\text{cof}\,(\Phi-\pi) + \frac{r\,d\Phi\,d\pi}{\text{ſi}\,(\Phi-\pi)} = 0$$

& partant

$$d\pi = \frac{a\,d\omega^2\,\text{ſi}\,(\Phi-\pi)}{\Pi\,r\,d\Phi}\Big(P\,\text{ſi}\,(\Phi-\pi) + Q\,\text{cof}\,(\varphi-\pi) - \frac{R}{\text{tang}\,\varrho}\Big)$$

& à cauſe de $d.\ \text{tang}\,\varrho = \frac{d\pi\,\text{tang}\,\varrho}{\text{tang}\,(\Phi-\pi)}$ ou $d.l\,\text{tang}\,\varrho = \frac{d\pi}{\text{tang}\,(\Phi-\pi)}$

nous

nous aurons

$$d.l\,\text{tang}\,\varrho = \frac{a\,d\omega^2\,\text{cof}(\varphi-\pi)}{\Pi\,r\,d\varphi}\left(P\,\text{fi}(\varphi-\pi)+Q\,\text{cof}(\varphi-\pi)-\frac{R}{\text{tang}\,\varrho}\right)$$

Donc, par le moyen de ces deux dernieres équations, nous ſommes en état de déterminer pour chaque tems propoſé, tant la ſituation de la ligne des noeuds, que l'inclinaiſon de l'orbite de la Planete au plan fixe A C R. C. Q. F. T.

Coroll.

LIV. Ce probleme demande donc, outre les deux équations, auxquelles le probleme precedent a été reduit, encore la ſolution de ces deux équations:

$$d\pi = \frac{a\,d\omega^2\,\text{fi}(\varphi-\pi)}{\Pi\,r\,d\varphi}\left(P\,\text{fi}(\varphi-\pi)+Q\,\text{cof}(\varphi-\pi)-\frac{R}{\text{tang}\,\varrho}\right)$$

$$d.l\,\text{tang}\,\varrho = \frac{a\,d\omega^2\,\text{cof}(\varphi-\pi)}{\Pi\,r\,d\varphi}\left(P\,\text{fi}(\varphi-\pi)+Q\,\text{cof}(\varphi-\pi)-\frac{R}{\text{tang}\,\varrho}\right)$$

desquelles il ne ſera pas difficile de trouver par voye d'approximation les valeurs de π & de ϱ; pourvuqu' on ait deja déterminé le rapport entre r, φ & ω par les deux prémieres équations.

SOLUTION

Fig. 1.

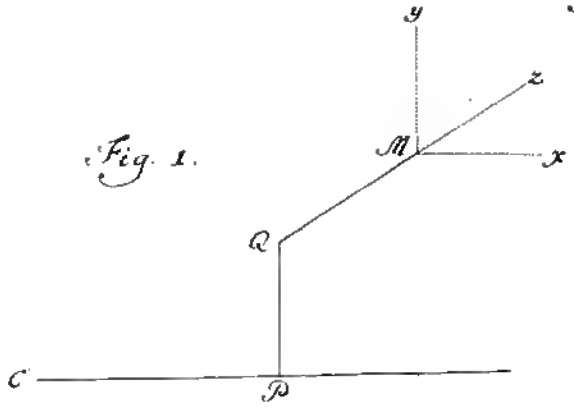


Fig. 2.

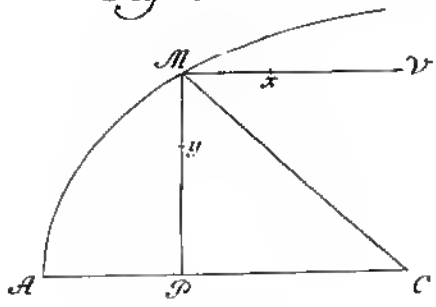


Fig. 3.

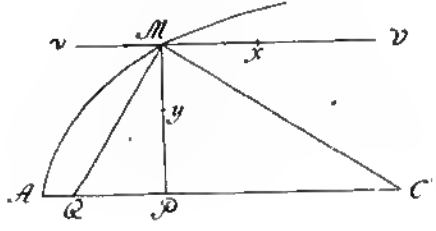
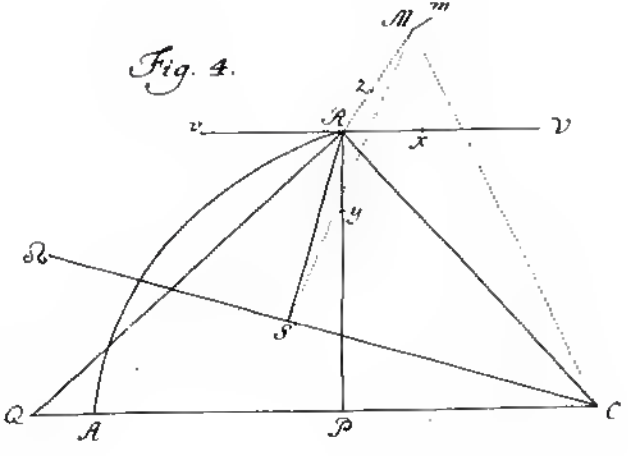


Fig. 4.



Mem de l'Acad. Tome 3. pag. 93.

F. Frisch. fe.